

עבודת קיץ במתמטיקה לתלמידים העולים לכיתה יא .

5 יחידות.

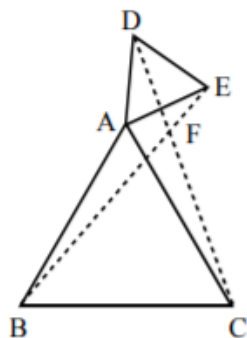


" המתמטיקה מאלה סודותיה לאלה שאוהבים אותה." ארכימדס

התרגילים מעבודת קיץ של יואל גבע
שנה"ל תשפ"א

עליכם לפתור את העבודה בצורה מסודרת ולהגיש בשבוע ראשון ללימודים.
מאחלת חופשה נעימה ופוריה.
אירנה

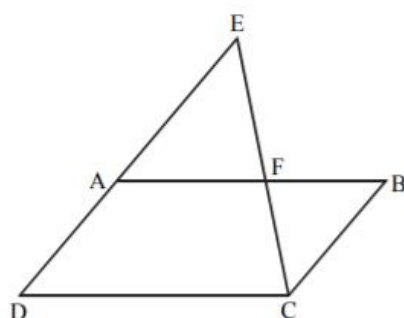
שאלה 1



המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים
שווי-צלעות. הקטעים BE ו- CD
נחתכים בנקודה F.
א. הוכח: $BE = CD$.
ב. הוכח: $\angle ACD = \angle ABE$.
ג. חשב את הזווית BFC.

תשובה: ג. 60° .

שאלה 2



המרובע ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).

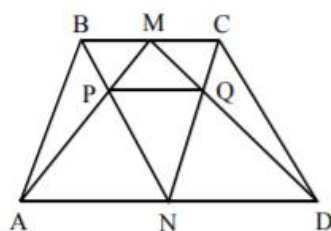
א. הוכח: $\frac{BF}{FA} = \frac{AD}{AE}$.

ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}$.

(2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1),

והוכח: $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$.

שאלה 3



בטרפז ABCD ($BC \parallel AD$) הנקודות M ו- N
הם אמצעי הבסיסים, הקטעים CN ו- DM
נחתכים בנקודה Q, הקטעים AM ו- BN
נחתכים בנקודה P. (ראה ציור).

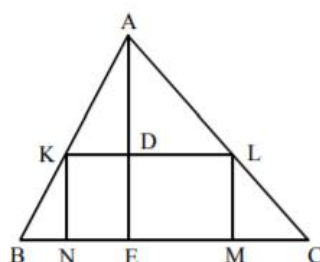
א. הוכח: $PQ \parallel AD$.

ב. נתון גם: $AD = 2a$, $BC = a$.

הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ.

תשובה: ב. $\frac{2}{3}a$.

שאלה 4



במשולש ABC חסום מלבן KLMN.

הגובה AE לצלע BC חותך את צלע

המלבן KL בנקודה D.

נתון: $AE = h$, $KL = 2KN$, $BC = 6$ ס"מ.

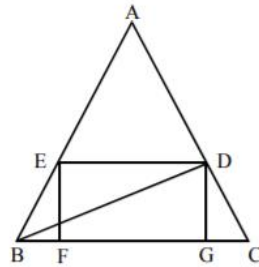
הבע באמצעות h:

א. את אורך הקטע AD.

ב. את יחס השטחים: $\frac{S_{\triangle AKD}}{S_{\triangle KBN}}$.

תשובה: א. $\frac{h^2}{h+3}$. ב. $\frac{h^2}{9}$.

שאלה 5

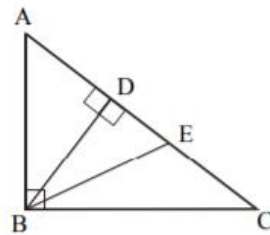


במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$),
 חסום מלבן $DEFG$. BD חוצה את
 הזווית ABC ומחלק את השוק AC
 כך ש- $AD:DC = 2:1$. נתון: $BC = 2a$.
 בטא באמצעות a :
 (1) את אורכי הקטעים AD ו- DC .
 (2) את שטח המלבן $DEFG$.

תשובה: (1) $2\frac{2}{3}a$, $1\frac{1}{3}a$. (2) $\frac{4\sqrt{15}}{9}a^2$.

טריגונומטריה במישור

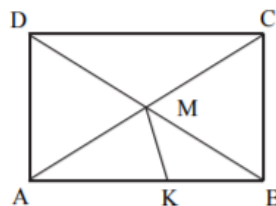
שאלה 6



במשולש ישר-זווית ABC נתון: $AB = 6$ ס"מ,
 $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = 90^\circ$.
 BD הוא גובה ליתר.
 BE הוא חוצה-זווית של $\angle DBC$.
 הבע את אורך הקטע EC באמצעות α .

תשובה: $6 \sin \alpha (\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{2})$.

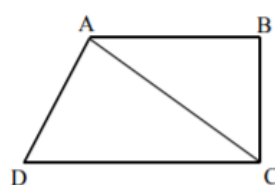
שאלה 7



במלבן $ABCD$ נתון: $AB = 8.4$ ס"מ,
 $AC = 10$ ס"מ, $AM = AK$.
 חשב את אורך הקטע MK .

תשובה: 2.828 ס"מ.

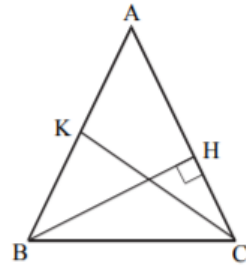
שאלה 8



$ABCD$ הוא טרפז ישר-זווית ($BC \perp DC$, $AB \parallel CD$).
 נתון: $AC = CD$, $\angle ACD = \alpha$.
 א. הבע באמצעות α את היחס בין שטח
 המשולש ACD לשטח המשולש ABC .
 ב. חשב את היחס הנ"ל כאשר $\alpha = 60^\circ$.

תשובה: א. $\frac{1}{\cos \alpha}$. ב. 2 .

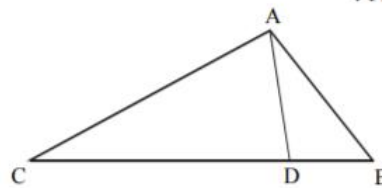
שאלה 9



במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) שווה אורך הבסיס ל- a , והזווית שלידו ל- β ($\beta > 45^\circ$).
 BH הוא גובה לשוק AC ו-CK תיכון לשוק AB.
 הבע באמצעות a ו- β :
 א. את אורך הקטע AH.
 ב. את שטח המשולש AKH.

תשובה: א. $a \sin \beta \tan(2\beta - 90^\circ) = \frac{-a \sin \beta \cos 2\beta}{\sin 2\beta}$. ב. $\frac{-a^2 \sin^2 \beta \cos 2\beta}{4 \sin 2\beta}$.

שאלה 10

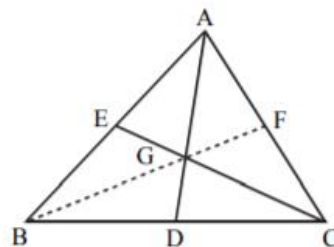


D היא נקודה על הצלע CB במשולש ABC.
 נתון: $\angle DAB = 20^\circ$, $\angle CAD = \alpha$, $AB = 5$ ס"מ, $AC = 7$ ס"מ.
 א. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש ADC לשטח המשולש ADB.
 ב. מצא את α כאשר שטחי המשולשים שווים.
 ג. בעבור איזה ערך של α יחס השטחים הנ"ל הוא הגדול ביותר?

תשובה: א. $\frac{7 \sin \alpha}{5 \sin 20^\circ}$. ב. 14.14° . ג. 90° .

בעיות המשלבות גיאומטריה וטריגונומטריה

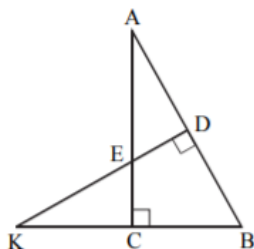
שאלה 11



הנקודות D ו-E הן אמצעי הצלעות BC ו-AB של משולש ABC. AD ו-CE נחתכים בנקודה G. המשך הקטע BG חותך את הצלע AC בנקודה F.
 א. הוכח: $AF = CF$.
 ב. נתון: $\angle ABF = 30^\circ$, $AC = 6$ ס"מ, $\angle BAC = 70^\circ$. חשב את אורך הצלע AB.

תשובה: ב. 45.58° .

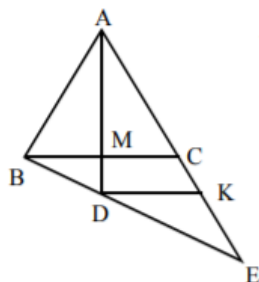
שאלה 12



המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\angle C = 90^\circ$).
האנך האמצעי ליתר AB חותך את היתר
בנקודה D, את הניצב AC בנקודה E
ואת המשך הניצב BC בנקודה K.
א. הוכח: $\triangle AED \sim \triangle KBD$.
ב. נתון: $KE = 3a$, $DE = a$.
חשב את הזווית B.

תשובה: ב. 63.43° .

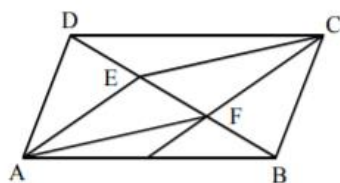
שאלה 13



AM הוא התיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים ABC
($AB = AC$). E נקודה על המשך הצלע AC.
המשך התיכון AM חותך את הקטע BE
בנקודה D. הקטע DK מקביל ל-BC.
א. הוכח: $\frac{AB}{AE} = \frac{CK}{EK}$.
ב. נתון: $AB = 8$ ס"מ, $CK = 2$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע EK.
ג. נתון גם: $\angle ABE = 82^\circ$. חשב את הזווית BAC.

תשובה: ב. $3\frac{1}{3}$ ס"מ. ג. 61.55° .

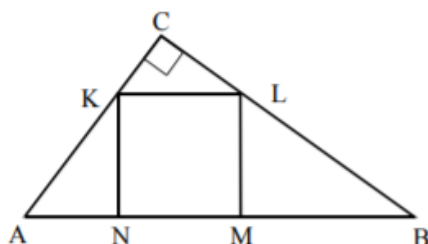
שאלה 14



המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטעים AE ו-CF הם חוצי זוויות
המקבילית - $\angle DAB$ ו- $\angle DCB$, בהתאמה.
א. הוכח: המרובע AECF הוא מקבילית.
ב. נתון: $AB = 2BC$. הוכח: המשך הקטע CF
חוצה את צלע המקבילית AB.
ג. נתון גם: $BD = 0.8DC$. חשב את הזווית החדה של המקבילית ABCD.

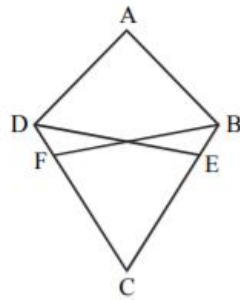
תשובה: ג. 52.41° .

שאלה 15



ABC הוא משולש ישר-זווית ($AC \perp BC$).
KLMN הוא ריבוע החסום במשולש.
נתון: $AN = 4$ ס"מ, $MB = 9$ ס"מ.
א. חשב את צלע הריבוע.
ב. חשב את הזווית CKL.

תשובה: א. 6 ס"מ. ב. 56.31° .

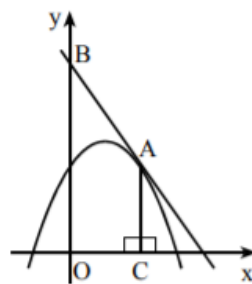


- המרובע ABCD הוא דלתון ($BC = DC$, $AB = AD$).
 DE חוצה את הזווית ADC
 ו-BF חוצה את הזווית ABC.
 א. הוכח: המרובע BDFE
 הוא טרפז שווה-שוקיים.
 ב. נתון: $\angle DBF = \alpha$, $DE = m$.
 הבע באמצעות m ו- α את שטח הטרפז BDFE.

תשובה: ב. $\frac{m^2 \sin 2\alpha}{2}$.

חשבון דיפרנציאלי - פולינומים.

שאלה 1



- לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 2x + 3$ מעבירים משיק
 בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה-y
 בנקודה B. מנקודה A מורידים אנך AC
 לציר ה-x. חשב את שטח הטרפז ABOC
 (O - ראשית הצירים).

תשובה: 10.

שאלה 2

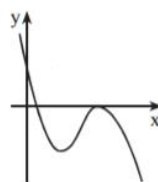
- הנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפונקציה $y = x^3 - 7x + 1$,
 כך ששיעור ה-x בנקודה A גדול ב-4 משיעור ה-x בנקודה B.
 ידוע כי המשיקים לפונקציה בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.
 מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

תשובה: $A(2; -5)$, $B(-2; 7)$.

שאלה 3

- נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 63x + 49$.
 א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון,
 תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה-y.
 ב. הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x היא $(1; 0)$.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה-x?

תשובה:



- א. תחום הגדרה: כל x.
 נקודות קיצון: $(3; -32)$ מינימום,
 $(7; 0)$ מקסימום.
 עלייה: $3 < x < 7$; ירידה: $x < 3$ או $x > 7$.
 נקודת חיתוך: $(0; 49)$.
 ד. בשתי נקודות.

שאלה 4

- נתונה הפונקציה $y = x^4 - 4x^2$.
- חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
 - מצא לאילו ערכים של k , הפונקציה חותכת את הישר $y = k$:
 - ב-4 נקודות.
 - ב-3 נקודות.
 - ב-2 נקודות.
 - באף נקודה.

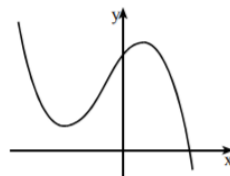
תשובה:

- תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{2}; -4)$ מינימום, $(0; 0)$ מקסימום, $(-\sqrt{2}; -4)$ מינימום. נקודות חיתוך: $(2; 0)$, $(0; 0)$, $(-2; 0)$.
- חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: $-2 < x < 2$, $x \neq 0$.
- $-4 < k < 0$.
 - $k = 0$.
 - $k > 0$ או $k = -4$.
 - $k < -4$.

שאלה 5

- לפונקציה $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx + 10$ יש נקודת קיצון ב- $x = 1$.
- מצא את m .
 - מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) - 13 = 0$.

תשובה:



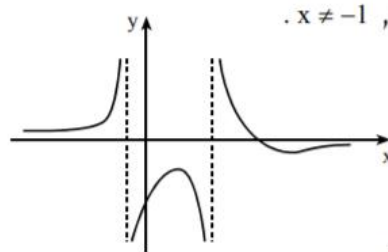
- 3.
- $(1; 11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(-3; 1)$ מינימום.
- פתרון אחד.

פונקציה רציונלית

שאלה 6

- הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $y = \frac{ax + 16}{x^2 - 3x - b}$. בנקודה $x = 2$ הפונקציה יש נקודת קיצון.
- מצא את a ואת b .
 - מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
 - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים משיק וישר המאונך למשיק. ארבעת הישרים הנ"ל יוצרים מרובע. חשב את שטח המרובע.

תשובה:



א. $a = -2$, $b = 4$. ב. תחום הגדרה: $x \neq -1$, $x \neq 4$.

נקודות חיתוך: $(0; -4)$, $(8; 0)$.

אסימפטוטות: $x = -1$, $x = 4$, $y = 0$.

נקודות קיצון: $(2; -2)$ מקסימום, $(14; -0.08)$ מינימום.

עלייה: $x > 14$ או $-1 < x < 2$ או $x < -1$.

ירידה: $4 < x < 14$ או $2 < x < 4$. ד. 23.04.

שאלה 7

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 - 6x + 8}$ בנקודה $(5; 5\frac{1}{3})$ הוא $-\frac{40}{9}$.
א. מצא את a ואת b .

ב. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.

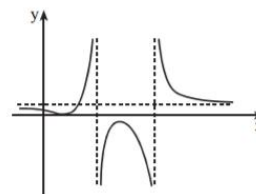
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. (1) מצא את תחומי החיוביות של הפונקציה.

(2) מצא לאילו ערכי x שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה הם חיוביים.

תשובה:



א. $b = -2$, $a = 1$.

ב. (1) $x \neq 1$, $x \neq 4$.

(2) מינימום, $(2.5; -3)$ מקסימום.

(3) עלייה: $1 < x < 2$ או $2 < x < 2.5$.

ירידה: $x < 1$ או $2.5 < x < 4$ או $x > 4$.

(4) $(0; \frac{1}{8})$, $(1; 0)$. (5) $y = 1$, $x = 4$, $x = 2$.

ד. (1) $x < 1$ או $1 < x < 2$ או $x > 4$.

(2) $1 < x < 2$ או $2 < x < 2.5$.

שאלה 8

הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x) = a + \frac{4x - 15}{(x - 4)^2}$.
א. מצא את הערך של a .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

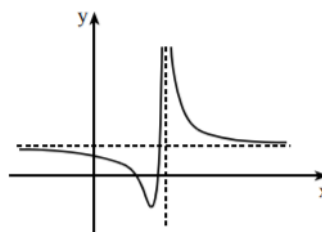
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 2f(x) + c$. נקודת המינימום

של הפונקציה $g(x)$ היא $(3.5; 3)$. מצא את ערך הפרמטר c .

תשובה:



א. 2. ב. $x \neq 4$.

ג. מינימום. $(3.5; -2)$.

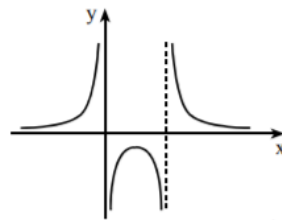
ד. $(0; 1\frac{1}{16})$, $(3.71; 0)$, $(2.29; 0)$.

ו. 7.

שאלה 9

- נתונה פונקציה $f(x) = \frac{2}{ax^2 - x}$. אחת האסימפטוטות של הפונקציה היא ישר המקביל לציר ה- y (ולא מתלכד איתו). ישר זה חותך את הישר $y = x + 3$ בנקודה ששיעור ה- y שלה הוא 4.
- מצא את הערך של הפרמטר a .
 - מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - מצא לאלו ערכים של t יש למשוואה $f(x) = t$:
 - שני פתרונות. (2) אף פתרון. (3) פתרון אחד.

תשובה:



1. ב. תחום הגדרה: $x \neq 1, x \neq 0$.
 - נקודות קיצון: $(\frac{1}{2}; -8)$ מקסימום.
 - עלייה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x < 0$; ירידה: $x > 1$ או $\frac{1}{2} < x < 1$. נקודות חיתוך: אין.
 - אסימפטוטות: $y = 0, x = 1, x = 0$.
 - (1) $t > 0$ או $t < -8$.
 - (2) $-8 < t \leq 0$.
 - (3) $t = -8$.

שאלה 10

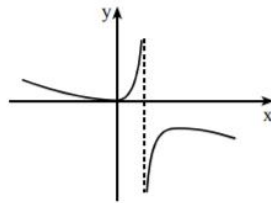
- נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{32x}{(x^2 + 3)^2}$.
- הוכח שהפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .
 - מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן $f'(x) = 0$, וקבע אם הן מסוג מינימום או מקסימום.
 - הוכח שפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

תשובה:

- ב. (1; 2) מקסימום, (-1; -2) מינימום.

שאלה 11

- נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$.
- מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - מצא עבור פונקציית הנגזרת $f'(x)$:
 - תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם ציר ה- x .
 - תחומי חיוביות ושליליות. (4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 - שרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.
 - הנח שלגרף הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.



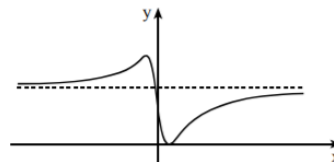
11. א. $x \neq 3$ (1)
 (2) מינימום, $(0; 0)$, מקסימום $(6; -12)$
 (3) עלייה: $3 < x < 6$ או $0 < x < 3$;
 ירידה: $x > 6$ או $x < 0$.
 (4) $(0; 0)$. (5) $x = 3$.

שאלה 12

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x-a)^2}{x^2+5}$, $a > 0$.

- א. חקור את הפונקציה ומצא (במידת הצורך הבע באמצעות a):
 (1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם הצירים.
 (3) נקודות קיצון. (4) תחומי עליה וירידה.
 (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. הנקודות A ו-B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שמימין לנקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- x . נסמן: $x_A = x_1$, $x_B = x_2$.
 הוכח: $-1 < f(x_1) - f(x_2) < 1$.

תשובה:



- א. (1) כל x .
 (2) $(0; \frac{a^2}{5})$, $(a; 0)$.
 (3) מינימום, $(a; 0)$.
 מקסימום $(-\frac{5}{a}, \frac{a^2+5}{5})$.
 (4) עלייה: $x > a$ או $x < -\frac{5}{a}$;
 ירידה: $-\frac{5}{a} < x < a$.
 (5) $y = 1$.

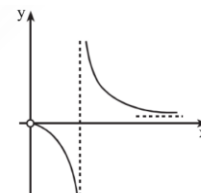
פונקציית שורש.

שאלה 13

נתונה הפונקציה $y = \frac{5x}{x-4\sqrt{x}}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 הסבר מדוע יש רק אסימפטוטה אחת המקבילה לציר ה- y .
 ג. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה:



- א. $x \neq 16$, $x > 0$.
 ב. $y = 5$, $x = 16$.

שאלה 14

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון (כולל הנקודות שבקצה תחום ההגדרה).
 ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
 ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

א.

$$y = \frac{x-3}{\sqrt{2x-6}}$$

ב.

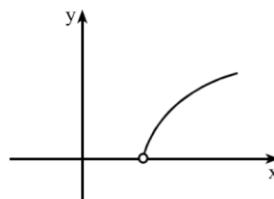
$$y = \frac{10-2x}{\sqrt{x^2-25}}$$

ג.

$$y = \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}$$

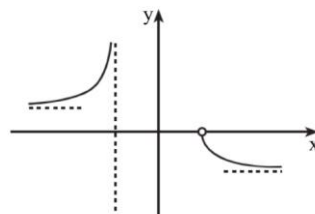
תשובות:

א.



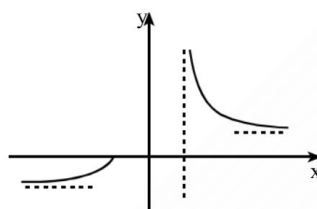
- א. $x > 3$.
 ב. אין.
 ג. עלייה: $x > 3$; ירידה: אין.
 ד. אין.
 ה. אין.

ב.



- א. $x < -5$ או $x > 5$.
 ב. אין.
 ג. עלייה: $x < -5$; ירידה: $x > 5$.
 ד. אין.
 ה. $y = 2$, $y = -2$, $x = -5$.

ג.



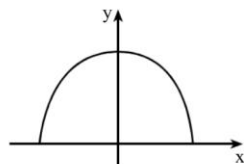
- א. $x \leq -1$ או $x > 2$.
 ב. $(-1; 0)$ מקסימום.
 ג. עלייה: $x < -1$; ירידה: $x > 2$.
 ד. $(-1; 0)$.
 ה. $y = -1$, $y = 1$, $x = 2$.

שאלה 15

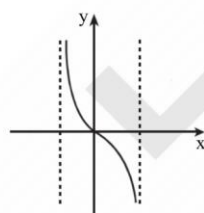
נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

- מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.
 - הוכח: הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
 - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - מצא עבור פונקציית הנגזרת $f'(x)$:
- תחום הגדרה.
 - אסימפטוטות אנכיות.
- ה. שרטט את גרף הנגזרת $f'(x)$.

תשובות:



- תחום הגדרה: $-3 \leq x \leq 3$.
- נקודות קיצון: $(0;3)$ מקסימום, $(3;0)$ מינימום, $(-3;0)$ מינימום.
- נקודות חיתוך: $(-3;0)$, $(3;0)$, $(0;3)$.



- $-3 < x < 3$.
- $x = -3$, $x = 3$.