

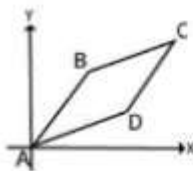
עבודת קיץ 4 יחידות מסיימי כיתה י'

חלק א : גיאומטריה אנליטית

נוסחאות

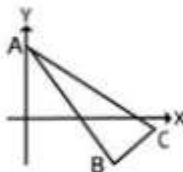
שיעורי אמצע הקטע המחבר בין הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) הם : $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$.
המרחק d בין הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) הוא : $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$.
שיפוע הישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) הוא : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
משוואת הישר ששיפועו m אשר עובר בנקודה (x_1, y_1) היא : $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$.
כאשר שני ישרים מקבילים, אז שיפועיהם שווים : $m_1 = m_2$ וכאשר הם מאונכים : $m_1 \cdot m_2 = -1$.

א. רמה בסיסית



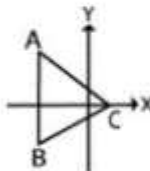
1. נתונות הנקודות : $A(0,0)$, $B(3,4)$, $C(7,7)$, $D(4,3)$.

- הוכח : המרובע ABCD הוא מעוין.
- חשב את היקף המעוין.
- חשב את אורכי אלכסוני המעוין.
- חשב את שטח המעוין.



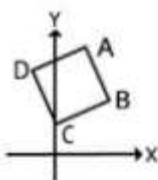
2. נתונות הנקודות : $A(0,4)$, $B(6,-4)$ ו- $C(10,-1)$.

- הוכח : המשולש ABC ישר זווית.
- חשב את שטח המשולש ABC.
- מצא את משוואת הישר העובר דרך אמצע הצלע AB ושיפועו 2.



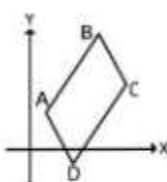
3. נתונים קדקודי המשולש ABC : $A(-3,3)$, $B(-3,-2)$ ו- $C(1,0)$.

- הוכח : המשולש ABC הוא שווה שוקיים.
- מצא את שיעורי אמצע הבסיס BC.
- חשב את אורכו של גובה המשולש ABC היוצא מהנקודה A.
- חשב את שטח המשולש ABC.



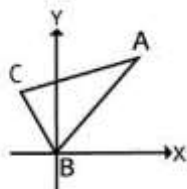
4. בריבוע ABCD נתונים הקדקודים : $A(2,7)$ ו- $B(3,4)$.

- אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $(1,5)$.
- מצא את שיעורי הקדקודים C ו- D.
- חשב את שטח הריבוע.

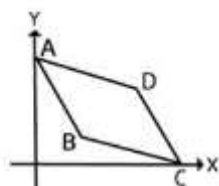


5. במקבילית ABCD נתונים שיעורי הקדקודים : $A(1,2)$, $B(4,6)$ ו- $D(2,-1)$.

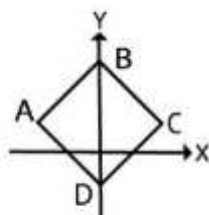
- מצא את שיעורי מפגש האלכסונים במקבילית.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- חשב את היקף המקבילית.



6. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AC=AB$) הנקודה E היא אמצע הבסיס BC. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים.
נתון: $A(4,8)$. משוואת הגובה AE היא: $y = x + 4$.
א. מצא את שיעורי הנקודות E ו-C.
ב. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.



7. אלכסוני המעוין ABCD נחתכים בנקודה E (3,3). נתון: D (4,4).
א. מצא את שיעורי הקדקוד B.
ב. מצא את משוואת האלכסון AC.
ג. נתון: הקדקוד A נמצא על ציר ה-y והקדקוד C נמצא על ציר ה-x. מצא את שיעורי הנקודות A ו-C.
ד. חשב את שטח המעוין.
ה. חשב את היקף המעוין.



8. בריבוע ABCD משוואות הצלעות AB, BC ו-AD הן בהתאמה:
 $y = -x + 5$, $y = -x - 1$, $y = x + 5$.
א. מצא את שיעורי הקדקודים A ו-B.
ב. נתון הקדקוד D(0, -1). מצא את שיעורי הקדקוד C ואת משוואות אלכסוני הריבוע.

פתרונות:

1. ב. 20 יח' אורך. ג. $\sqrt{2}$ יח' אורך BD , $\sqrt{98}$ יח' אורך AC . ד. 7 יח"ר.
2. ב. 25 יח"ר. ג. $y = 2x - 6$.
3. ב. $(-1, -1)$. ג. $\sqrt{20}$ יח' אורך. ד. 10 יח"ר.
4. א. $D(-1, 6)$, $C(0, 3)$. ב. 10 יח"ר.
5. א. $(3, 2.5)$. ב. $C(5, 3)$. ג. 16.32 יח' אורך.
6. א. $E(-2, 2)$, $C(-4, 4)$. ב. 24 יח"ר.
7. א. $B(2, 2)$. ב. $y = -x + 6$. ג. $A(0, 6)$, $C(6, 0)$. ד. 12 יח"ר. ה. $8\sqrt{5} = 17.89$ יח' אורך.
8. א. $A(-2, 3)$, $B(5, 0)$. ב. $C(2, 3)$, $D(0, 0)$. ג. $AC: y = 2$, $BD: x = 0$.
9. א. $O(4, -1)$. ב. 3 יח' אורך. ג. $A(1, 2)$, $B(3, -2)$, $C(-1, -3)$.

ג. תרגילים מתקדמים לתלמידי 4 ו-5 יחידות לימוד

16. במקבילית ABCD משוואת הישר AB היא: $y = 3x - 3$ ומשוואת הישר AD היא: $y = 0.25x + 2.5$. אחד הקדקודים של המקבילית הוא הנקודה (8,10).

א. מצא את משוואת האלכסון BD.

ב. שרטט את המקבילית במדויק על מערכת הצירים. מהנקודות C ו-D מורידים אנכים לציר ה-x, אשר חותכים את ציר ה-x בנקודות E ו-F בהתאמה. חשב את שטח הטרפז CDFE.

17. במקבילית ABCD נתון: A(-1,5) ו-C(4,5). משוואת הצלע AD היא: $y = -8x - 3$. הישר AM הוא הגובה היוצא מהקדקוד A לצלע DC. שיפוע הצלע CD הוא 2. חשב את:
א. אורכו של הגובה AM.
ב. שטח המקבילית.

18. שתיים מצלעותיו של מלבן מונחות על שני הישרים: $y = 4x - 6$ ו: $y = 4x - 23$. שניים מקדקודי המלבן הם: (4,10) ו-(2,2).
א. מצא את נקודת המפגש של אלכסוני המלבן.
ב. חשב את שטח המלבן.

19. בריבוע ABCD הקדקוד D נמצא על הציר ה-x. משוואת הצלע AB היא: $y = 2x$. משוואת האלכסון BD היא: $y = -3x + 15$.
א. מצא את משוואת הצלע CD.
ב. חשב את שטח הריבוע.

פתרונות:

16 א. $y = -2.5x + 19$ ב. 14 יח"ר. 17 א. $\sqrt{20}$ יח' אורך. ב. 40 יח"ר. 18 א. (5,5). ב. 34 יח"ר.

19 א. $y = 2x - 10$ ב. 20 יח"ר.

2. נתון משולש ABC.

הקודקודים B ו-C מונחים על ציר ה-x, כמתואר בציר שלפניך.

הקודקוד A נמצא ברביע הראשון.

משוואת הצלע AC היא: $y = -4\frac{1}{2}x + 36$.

נתון כי אורך הצלע BC הוא 5.

א. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא $22\frac{1}{2}$.

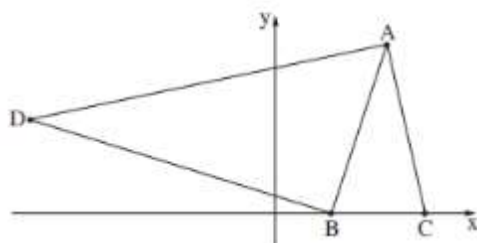
ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

D היא נקודה ברביע השני כך ש-DB מאונך ל-AB.

ג. מצא את משוואת הישר BD.

נתון כי שיעור ה-x של הנקודה D הוא -12.

ד. (1) הוכח כי $\angle DAC = 90^\circ$.



2. א. $B(3,0)$, $C(8,0)$.

ב. $A(6,9)$.

ג. $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

ד. (1) הוכחה.

2. נתון דלתון ABCD ($AB = AD$, $CB = CD$).

הקודקוד B מונח על ציר ה-y והקודקודים C ו-D מונחים על ציר ה-x, כמתואר בציר.

משוואת הישר BD היא: $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

א. מצא את שיעורי הקודקודים B, C ו-D.

שיעורי הקודקוד A הם (7, 9).

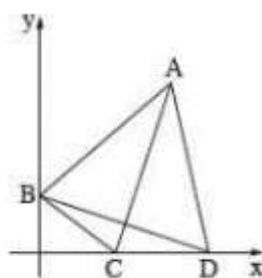
ב. חשב את שטח הדלתון ABCD.

הישר $y = 5$ חותך את הישרים AB ו-AD בנקודות E ו-F בהתאמה.

אורך הקטע EF הוא 5.

ג. (1) חשב את שטח המשולש AEF.

(2) חשב את שטח המרובע EFDCB.



פתרון: א. $B(0,3)$, $D(9,0)$, $C(4,0)$ ב. 45 יח"ר ג. 9 יח"ר ג. 36 יח"ר

נתון משולש ישר זווית שבו $\angle ABC = 90^\circ$.

הצלע AB מונחת על הישר $3x - 4y = 12$.

הישר חותך את ציר ה-x בנקודה B

ואת ציר ה-y בנקודה D.

הצלע AC מקבילה לציר ה-x.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB (ראה ציור).

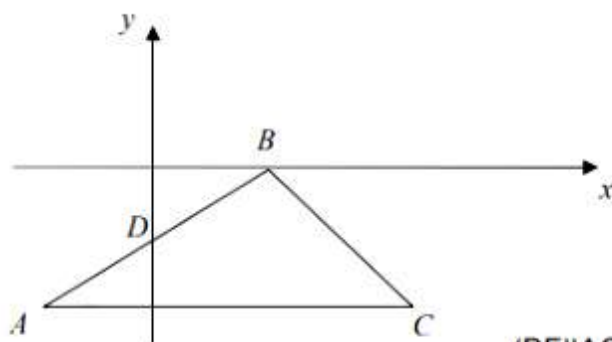
א. מצא את משוואת הצלע AC.

ב. מצא את השיעורים של הנקודה C.

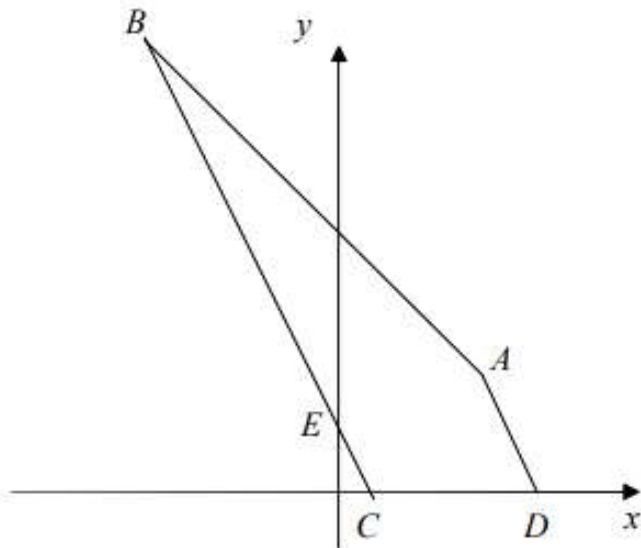
ג. נתון כי המרובע BACF הוא מקבילית ($BF \parallel AC$, $AB \parallel CF$).

מצא את השיעורים של הנקודה F.

ד. מצא את השטח של המקבילית BACF.



פתרון: א. $y = -6$ ב. $(8.5, -6)$ ג. $(16.5, 0)$ ד. 75 יח"ר

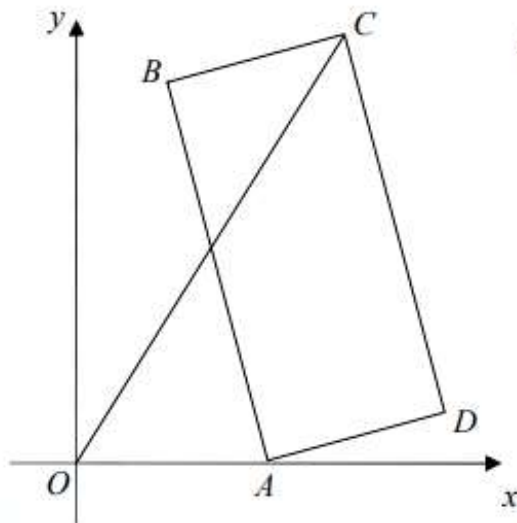


2. $ABCD$ הוא מרובע שבו $AD \parallel BC$.
 הצלע AB מונחת על הישר $x + y = 10$,
 והצלע CD מונחת על ציר ה- x .
 נתון: $D(8,0)$, $C(2,0)$.
 שיעור ה- x של הנקודה A הוא 6.
 א. מצא את שיעור ה- y של הנקודה A .
 ב. מצא את משוואת הישר AD .
 ג. מצא את שיעורי הנקודה B .
 ד. הישר BC חותך את ציר ה- y בנקודה E .
 (1) הראה כי הישר AE מקביל לציר ה- x .
 (2) מצא את שטח המשולש AEB .

שאלה 2

פתרון: א. 4 ב. $y = -2x + 16$ ג. $(-6, 16)$ ד. 1. הוכחה ד. 2. 36 יח"ר

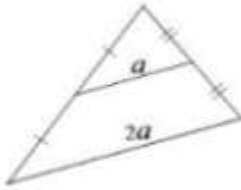
2014 חורף



- . במלבן $ABCD$ הקודקוד A נמצא על ציר ה- x (ראה ציור).
 שיעור ה- y של הקודקוד B הוא 8.
 משוואת הצלע BC היא $y = \frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$.
 משוואת הישר OC (O – ראשית הצירים) היא $y = 1.5x$.
 א. מצא את השיעורים של הקודקוד B ושל הקודקוד C .
 ב. (1) מצא את השיעורים של הקודקוד A .
 (2) מצא את השיעורים של נקודת המפגש של אלכסוני המלבן.
 ג. מצא את שטח המשולש OAD .

חלק ב : גיאומטריה המישור

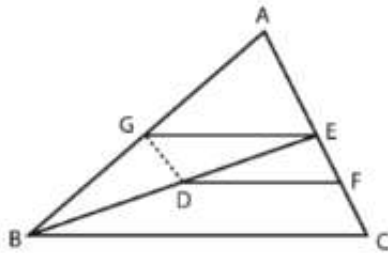
קטע אמצעים במשולש



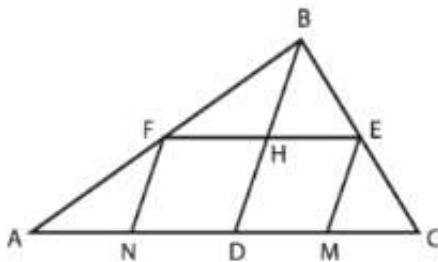
קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר בין אמצעי שתי צלעות במשולש.

- קטע האמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- ההפוך : קטע היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לצלע השלישית - חוצה את הצלע השנייה.
- קטע המחבר שתי נקודות על שתי צלעות במשולש, מקביל לשלישית ושווה באורכו למחציתה - הוא קטע אמצעים.

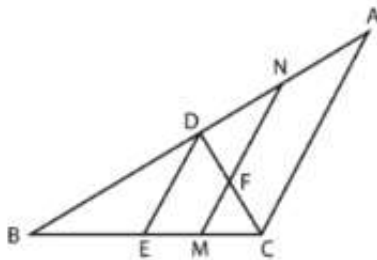
פתור את התרגילים הבאים :



- הישר GE הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$. הנקודות D ו-F הן אמצעי הקטעים BE ו-CE בהתאמה.
א. הוכח : $GE \parallel DF$
ב. הוכח : GEFD מקבילית.
ג. נתון : היקף המשולש $\triangle DEF$ הוא 12 ס"מ.
חשב את היקף המשולש $\triangle BCE$.



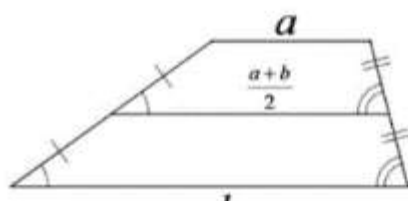
- הישר BD הוא תיכון ליתר במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$. EM ו-FN הם קטעי אמצעים במשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ABD$ בהתאמה.
א. הוכח : EHDH מעוין.
ב. נתון : $AB = 16$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.
חשב את היקף המעוין EHDH.



- במשולש $\triangle ABC$ הנקודות D ו-E הן אמצעי הקטעים AB ו-BC בהתאמה. הנקודות M ו-N הן אמצעי הקטעים CE ו-AD בהתאמה. נתון : $NF \parallel AC$.
א. הוכח : $NF = 2 \cdot MF$.
ב. נתון : $BC = 12$ ס"מ, $BE = DE$. חשב את אורך MN.
ג. נתון : $CE = CD$. חשב את היקף הטרפז DEMF.

פתרונות: (1) ג. 24 ס"מ. (2) ב. 20 ס"מ. (3) ב. 9 ס"מ. ג. 15 ס"מ.

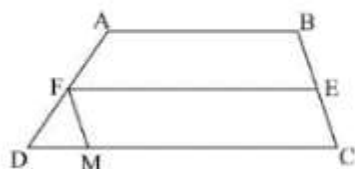
קטע אמצעים בטרפז



קטע האמצעים בטרפז מחבר את אמצעי שתי שוקי הטרפז.

- קטע האמצעים בטרפז מקביל לשני הבסיסים.
- קטע האמצעים בטרפז שווה למחצית סכום הבסיסים (ממוצע חשבוני של אורכי הבסיסים).
- **(הפוך):** קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל

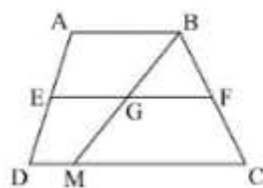
תרגילים:



1. הישר EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.

הנקודה M נמצאת על הבסיס CD כך שמתקיים $MF \parallel CE$.
נתון: 6 ס"מ $AB =$, 8 ס"מ $EF =$. חשב את:

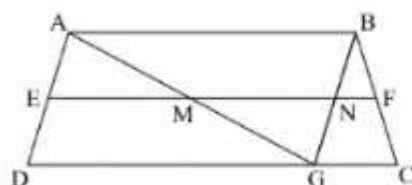
- א. אורך DM.
- ב. יחס השטחים: $\frac{S_{CEFM}}{S_{ADFM}}$.



2. הישר EF הוא קטע האמצעים בטרפז ABCD. הנקודה M נמצאת על

הבסיס CD. הישרים BM ו-EF נחתכים בנקודה G.
נתון: $GF = EG$.

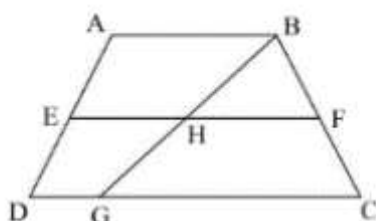
- א. הוכח: BEMF מקבילית.
- ב. נתון: 10 ס"מ $CD =$, $AB = 3 \cdot DM$. חשב את אורך הקטע GF.



3. הישר EF הוא קטע האמצעים בטרפז ABCD. הנקודה G

נמצאת על הבסיס CD כך ש: $DG = AB$. הישר EF חותך את הקטעים AG ו-BF בנקודות M ו-N בהתאמה.

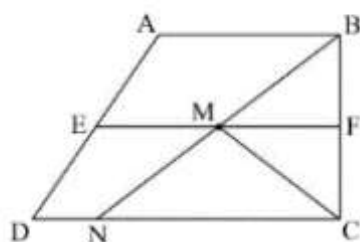
- א. הוכח: $EM = MN$.
- ב. נתון: $ME = 2 \cdot NF$. הוכח: $DG = 2 \cdot CG$.



5. הישר EF הוא קטע האמצעים בטרפז שווה שוקיים ABCD.

הנקודה G נמצאת על הבסיס CD. הישר BG חוצה את הקטע EF בנקודה H. נתון: $\angle BCD = 60^\circ$, $BG \perp BC$.

- א. נסמן: $CF = a$. הבע באמצעות a את אורך EH.
- ב. נתון: היקף הטרפז ABFE הוא 19 ס"מ, 1 ס"מ $GD =$. חשב את היקף הטרפז CDEF.



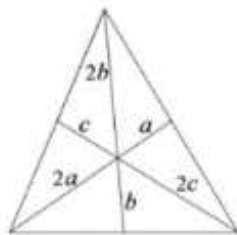
6. הישר EF הוא קטע האמצעים בטרפז ישר הזווית ABCD

($CD \perp BC$). הנקודה N נמצאת על הבסיס CD.

הישר BN חותך את הקטע EF בנקודה M.

- א. הוכח: $MN = CM$.
- ב. נתון: $AB = 3 \cdot DN$, $ME = MF$. הוכח: $CN = 4 \cdot DN$.

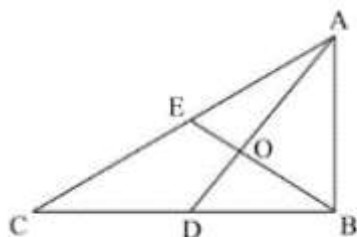
פתרונות: (1) א. 2 ס"מ. ב. 8. (2) ב. 4 ס"מ. (5) א. 2a. ב. 21 ס"מ.



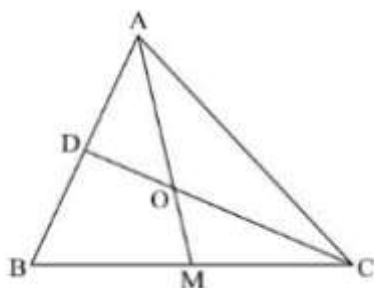
מפגש התיכונים במשולש

משפט:

שלושת תיכוני המשולש נפגשים בנקודה אחת ומחלקים האחד את השני לשני חלקים כך שהחלק הקרוב לקדקוד ארוך פי שניים מן החלק הרחוק ממנו.



3. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$) הישרים AD ו-BE הם תיכונים הנחתכים בנקודה O. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 18$ ס"מ.
 א. חשב את אורכי הקטעים AD ו-AO.
 ב. העבר את הישר DE. הוכח: $DE \perp BC$.



4. הישר CD הוא הגובה לבסיס במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$. התיכון AM חותך את הגובה CD בנקודה O.
 נתון: $AC = 25$ ס"מ, $CO = 16$ ס"מ. חשב את:
 א. אורך הבסיס AB.
 ב. שטח המשולש $\triangle ABC$.

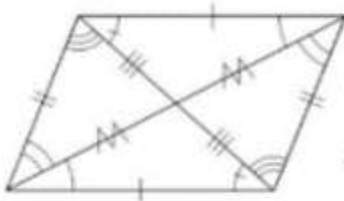
- 3) א. 15 ס"מ, AD = 10 ס"מ, AO = 4) א. 14 ס"מ. ב. 168 סמ"ר.

סיכום משפטים

מרובעים

סכום הזוויות במרובע הוא 360° מעלות.

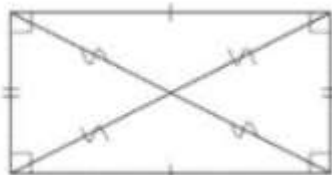
1. מקבילית היא מרובע בו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות.



- במקבילית כל זוג זוויות נגדיות שוות.
- (הפוך): מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות זו לזו - הוא מקבילית.
- במקבילית כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו, ושוות זו לזו.
- (הפוך): מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו - הוא מקבילית.
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
- (הפוך): מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה - הוא מקבילית.
- במקבילית סכום כל זוג זוויות סמוכות הוא 180° .

כיצד ניתן להוכיח שמרובע הוא מקבילית? ... אם נוכיח שבאותו מרובע יש:

- זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות.
- שני זוגות של צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
- שני זוגות של זוויות נגדיות שוות זו לזו.
- אלכסונים חוצים זה את זה.



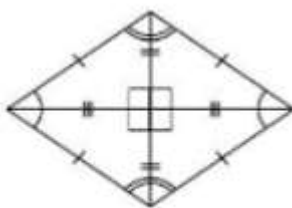
2. מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות (90°).

שימו לב! כל מלבן הוא גם מקבילית וחלים עליו כל חוקיה.

- במלבן כל ארבע הזוויות ישרות.
- במלבן האלכסונים שווים זה לזה.
- (הפוך): מקבילית שאלכסוניה שווים באורכם - היא מלבן.
- במלבן האלכסונים חוצים זה את זה.

כיצד ניתן להוכיח שמרובע הוא מלבן? ... אם נוכיח ש:

- המרובע הוא מקבילית ואחת הזוויות שלה ישרה.
- המרובע הוא מקבילית ואלכסוניה שווים זה לזה.
- יש במרובע שלוש זוויות ישרות (הרביעית חייבת להיות ישרה גם היא).



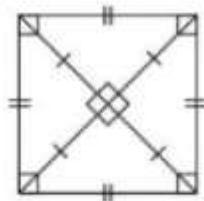
3. מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.

שימו לב! כל מעוין הוא גם מקבילית וחלים עליו כל חוקיה.

- כל צלעות המעוין שוות זו לזו.
- אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה, חוצים את זוויותיו וחוצים זה את זה.
- (הפוך): מקבילית בה אלכסון אחד חוצה זווית אחת - היא מעוין.
- (הפוך): מקבילית בה האלכסונים מאונכים זה לזה - היא מעוין.

כיצד ניתן להוכיח שמרובע הוא מעוין? ... אם נוכיח ש:

- ארבע צלעות המרובע שוות זו לזו.
- המרובע הוא מקבילית ויש בה שתי צלעות סמוכות שוות.
- המרובע הוא מקבילית שבה אחד האלכסונים הוא חוצה זווית.
- המרובע הוא מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה.

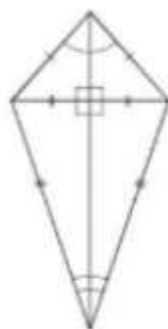


4. **ריבוע** הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו ישרות.
שימו לב! כל ריבוע הוא גם מקבילית וחלים עליו כל חוקיה.

- כל צלעות הריבוע שוות זו לזו.
- כל זוויות הריבוע ישרות.
- אלכסוני הריבוע שווים זה לזה, מאונכים זה לזה, חוצים זה את זה וחוצים את זוויות הריבוע.

כיצד ניתן להוכיח שמרובע הוא ריבוע? ... אם נוכיח ש:

- כל הצלעות שוות זו לזו, וכל הזוויות שוות זו לזו.
- המרובע הוא מעוין שאחת מזוויותיו ישרה.
- המרובע הוא מעוין שאלכסוניו שווים זה לזה.
- המרובע הוא מעוין ששתי זוויות סמוכות בו שוות זו לזו.
- המרובע הוא מלבן ששתי צלעות סמוכות בו שוות זו לזו.
- המרובע הוא מלבן שאחד מאלכסוניו הוא גם חוצה זווית.
- המרובע הוא מלבן שאלכסוניו מאונכים זה לזה.
- אלכסוני המרובע חוצים זה את זה, שווים זה לזה ואחד מהם חוצה את הזווית.
- אלכסוני המרובע חוצים זה את זה, שווים זה לזה ומאונכים זה לזה.



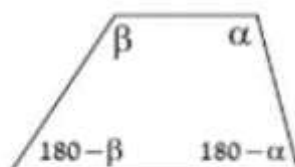
5. **דלתון** הוא מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.

- משפט הדלתון: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש שלו, מאונך לאלכסון השני וחוצה אותו.
- שתי הזוויות שבקצוות האלכסון המשני הן שוות זו לזו.

כיצד ניתן להוכיח שמרובע הוא דלתון? ... אם נוכיח ש:

- במרובע יש שני זוגות של צלעות סמוכות, אשר שוות זו לזו.
- במרובע האלכסונים מאונכים זה לזה ואחד מהם חוצה את השני.

6. **טרפז** הוא מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ('בסיסים') וזוג צלעות שאינן מקבילות ('שוקיים').



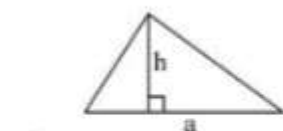
- סכום שתי הזוויות הצמודות לאותה שוק שווה ל- 180° מעלות.
- בטרפז שווה שוקיים: - זוויות הבסיס שוות.
- - האלכסונים שווים זה לזה.
- **(הפוך)**: טרפז שבו זוויות הבסיס שוות זו לזו - הוא טרפז שווה שוקיים.
- **(הפוך)**: טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה - הוא טרפז שווה שוקיים.

כיצד ניתן להוכיח שמרובע הוא טרפז? ... אם נוכיח ש:

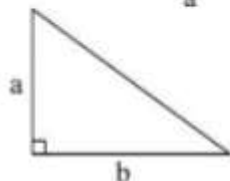
- רק זוג אחד של צלעות במרובע, מקבילות זו לזו (והזוג השני לא).
- זוג אחד של צלעות במרובע, מקבילות זו לזו אך אינן שוות זו לזו באורכן.

שטחים

משולשים

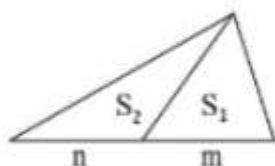


שטח משולש שווה למחצית מכפלת הבסיס בגובה היורד אליו: $S = \frac{a \cdot h}{2}$



שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת ניצביו: $S = \frac{a \cdot b}{2}$

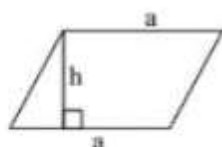
משפט עזר: ישר המחבר בין קדקוד המשולש לבין הצלע שמולו, מחלק את המשולש לשני משולשים שהיחס בין שטחיהם הוא כיחס החלוקה של הצלע המחולקת:



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n} \quad \text{בשרטוט:}$$

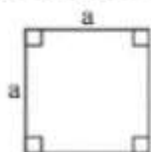
חשוב: זהו משפט עזר שאינו ברשימת המשפטים המאושרים לשימוש. לכן, לא ניתן לנמק בעזרתו בבגרות או במבחנים במהלך השנה אלא צריך להוכיח אותו בכל פעם שמשתמשים בו. עם זאת, הוא חשוב מאוד ותרגילים רבים נפתרים באמצעותו.

מרובעים

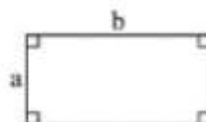


שטח מקבילית שווה למכפלת צלעה בגובה היורד אליה מהקדקוד שמולה: $S = a \cdot h$

ריבוע שווה לריבוע צלעו: $S = a^2$



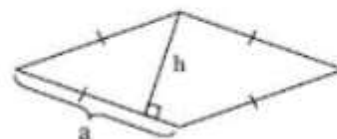
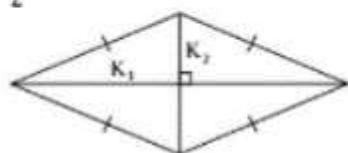
שטח מלבן שווה למכפלת אורכו ברוחבו: $S = a \cdot b$



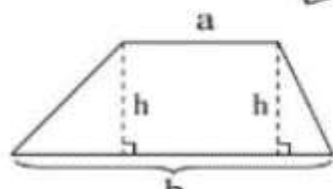
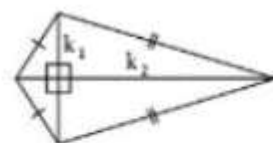
שטח מעוין ניתן לחישוב בשתי דרכים:

על ידי מכפלת הצלע בגובה היורד אליה: $S = a \cdot h$

או כמחצית מכפלת האלכסונים: $S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$

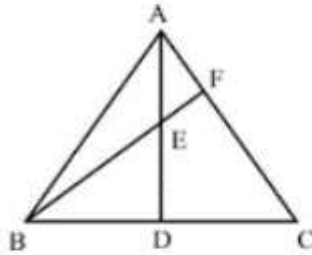


שטח דלתון שווה למחצית מכפלת האלכסונים: $S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$

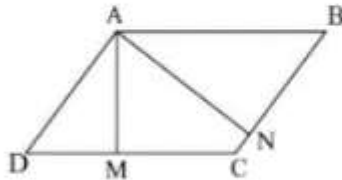


שטח טרפז שווה למחצית מכפלת הגובה בסכום הבסיסים: $S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

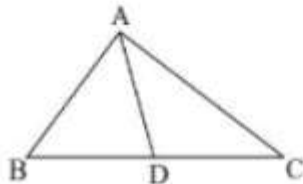
שטחים - תרגילי סיכום



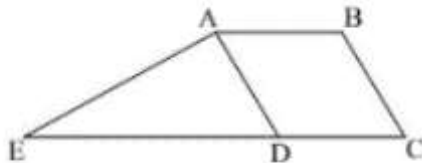
11. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) הגבהים AD ו-BF נחתכים בנקודה E. נתון: $BF = 24$ ס"מ, $AF = 7$ ס"מ. חשב את שטח:
- המשולש $\triangle BCF$.
 - המשולש $\triangle ABC$.
 - המשולש $\triangle ABD$.



12. הישרים AM ו-AN הם גבהים במקבילית ABCD. שהיקפה 120 ס"מ. הצלע AB ארוכה מהצלע AD ב-10 ס"מ. נתון: $AM = 20$ ס"מ. חשב את:
- שטח המקבילית ABCD.
 - אורך הגובה AN.
 - שטח המשולש $\triangle ABN$.



13. הישר AD הוא התיכון ליתר BC במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$. שהיקפו 24 סמ"ר. נתון: $AD = 5$ ס"מ, $AB < AC$. חשב את:
- שטח המשולש $\triangle ABC$.
 - שטח המשולש $\triangle ABD$.
 - המרחק בין התיכון AD לבין הקדקוד B.



15. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע CD של המקבילית ABCD. שהיקפה $8a$. נתון: $CD = 2a$.
- הבע באמצעות a את אורך הצלע AD.
 - נתון: $\angle ABC = 120^\circ$, $AE \perp AD$. הוכח ששטח המקבילית ABCD שווה לשטח המשולש $\triangle ADE$.
 - חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{ABCE}}{S_{ABCD}}$.

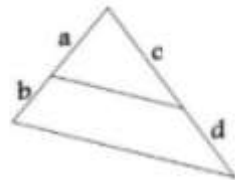
פתרונות:

11. א. 216 סמ"ר, ב. 300 סמ"ר, ג. 150 סמ"ר. 12. א. 700 סמ"ר, ב. 28 סמ"ר. 13. א. $2a$, ג. 2. 15. א. $2a$, ג. 2.

משפט תאלס

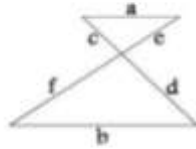
משפט תאלס -

שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.



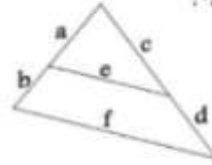
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{בשרטוט:}$$

משפט תאלס - הרחבה ב' ("שעון חולי"):



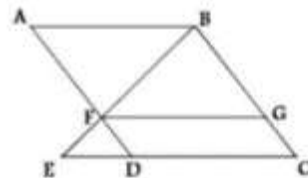
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

משפט תאלס - הרחבה א':

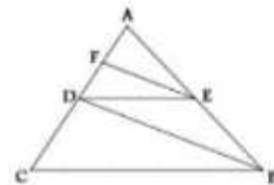


$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$$

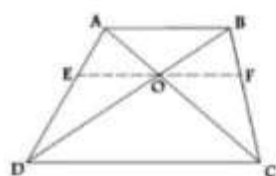
משפט תאלס (הפוך): שני ישרים המקצים על שוקי זווית קטעים פרופורציוניים - מקבילים זה לזה.



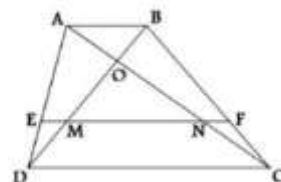
- הנקודות F ו-G נמצאות על צלעות המעוין ABCD שאורך צלעו 20 ס"מ. המשכי הישרים BF ו-CD נחתכים בנקודה E. נתון: $DE = 5$ ס"מ, $FG \parallel CE$.
א. חשב את אורך הקטע BG.
ב. חשב את אורך הקטע FD.
ג. נתון: היקף המשולש ABCE הוא 75 ס"מ. חשב את אורך הקטע EF.



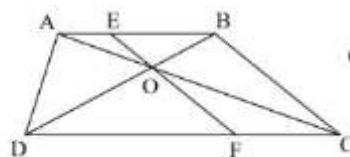
- הנקודות F ו-E, D נמצאות על צלעות המשולש ABC כך ש: $DE \parallel BC$, $EF \parallel BD$, $AB = 10$ ס"מ, $AC = 12.5$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ. חשב את:
א. אורכי הקטעים AF ו-DF.
ב. היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{AABD}}{S_{ABCD}}$.



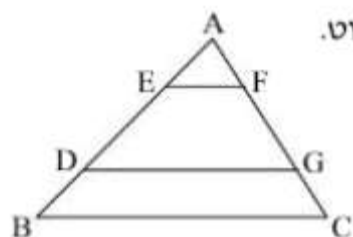
- אלכסוני הטרפז ABCD נחתכים בנקודה O. הנקודות F ו-E נמצאות על שוקי הטרפז כך שהקטע EF מקביל לבסיסים ועובר בנקודה O. נתון: $AB = 3$ ס"מ, $DC = 9$ ס"מ, $BD = 8$ ס"מ, $BC = 4$ ס"מ. חשב את:
א. אורכי הקטעים FO ו-BO.
ב. יחס השטחים: $\frac{S_{AABO}}{S_{ABFE}}$.



- הנקודות F ו-E נמצאות על שוקי הטרפז ABCD כך שהישר EF מקביל לבסיסים כמתואר בשרטוט. אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה O וחותכים את הישר EF בנקודות M ו-N. נתון: $AB = 4$ ס"מ, $BF = 36$ ס"מ, $CF = 12$ ס"מ, $CD = 20$ ס"מ. חשב את:
א. אורכי הקטעים MN ו-MF.
ב. יחס השטחים: $\frac{S_{CDMN}}{S_{ACFN}}$.



- הנקודות F ו-E נמצאות בהתאמה על הבסיסים AB ו-CD בטרפז ABCD. הקטע EF עובר בנקודת מפגש האלכסונים O ומקביל לשוק BC.
א. הוכח: $\frac{AE}{EO} = \frac{AB}{BC}$.
ב. נתון: $BE = 2EO$, $AE = 3$ ס"מ. חשב את אורך BC.



9. הנקודות D, E, F ו-G נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כמתואר בשרטוט.

נתון: $AF = 2$ ס"מ, $AG = 6$ ס"מ, $DE = 2AE$.

א. הוכח: $DG \parallel EF$.

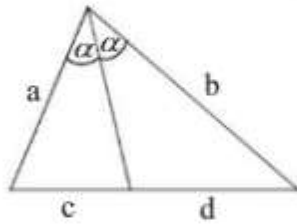
ב. נתון: $CF = 6$ ס"מ, $BE = AD = 9$ ס"מ. הוכח: $BC \parallel EF$.

ג. נתון: היקף הטרפז EFGD הוא 26 ס"מ. חשב את אורך BC.

פתרונות: 1. א. 16 ס"מ, ב. 4 ס"מ, ג. 6 ס"מ. 2. א. 2 ס"מ, $AF = 3$ ס"מ, $DF = \frac{2}{3}$. 3. א. 2 ס"מ, $BO = 2.25$ ס"מ, $FO = \frac{2}{5}$. 4. א. 15 ס"מ, $MF = 14$ ס"מ, $MN = 34$. 5. ב. 3 ס"מ. 6. א. 16 ס"מ.

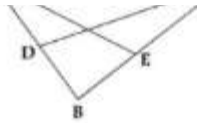
משפט חוצה הזווית

משפט חוצה הזווית (הפנימית): חוצה הזווית (הפנימית) במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים המתייחסים זה לזה כיחס בין שתי הצלעות הכולאות את הזווית.

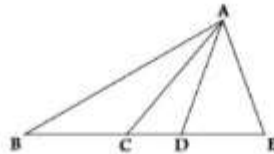


$$\text{בשרטוט: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

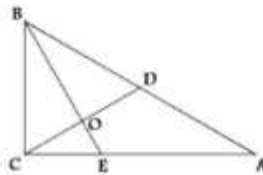
משפט הפוך: קטע המחבר קדקוד במשולש עם הצלע שמולו ומחלק אותה לשני קטעים המתייחסים זה לזה כיחס בין שתי הצלעות האחרות - חוצה את זווית המשולש.



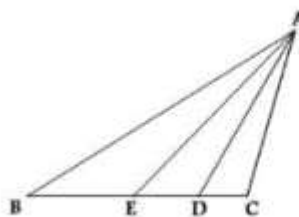
1. הזווית $\triangle ABC$. נתון: $AB = 3$ ס"מ, $AC = 5$ ס"מ. חשב את:
א. אורך הקטע CE .
ב. שטח המשולש $\triangle ADE$.



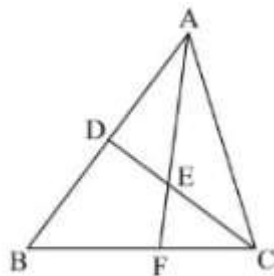
2. במשולש $\triangle ABC$ הישרים AD ו- AC חוצים את הזווית $\angle BAD$ ו- $\angle BAE$ בהתאמה. נתון: $\angle ADE = \angle AED$, $BC = 9$ ס"מ, $CD = 6$ ס"מ. השוק AB ארוכה בששה ס"מ מהישר AD .
א. חשב את אורך הקטע DE .
ב. נתון: שטח המשולש $\triangle ABC$ קטן בשני סמ"ר משטח המשולש $\triangle ADE$. חשב את אורך הגובה היורד מהקדקוד A במשולש $\triangle ABE$.



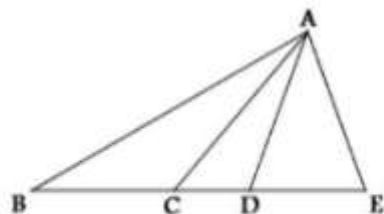
3. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$), חוצה הזווית BE והתיכון CD נחתכים בנקודה O .
נתון: $BC = 66$ ס"מ, $AB = 110$ ס"מ. חשב את:
א. אורך הקטע CD .
ב. אורכי הקטעים AE ו- CE .
ג. אורך הקטע DO .



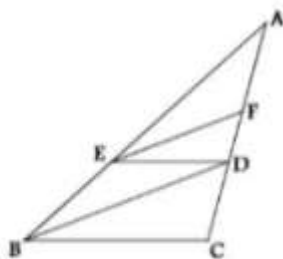
4. הקטע AE הוא תיכון במשולש $\triangle ABC$. הנקודה D נמצאת על הקטע CE . נתון: $\angle DAE = \angle CAD$, $BC = 20$ ס"מ, $AE = 1.5AC$.
א. חשב את היחס: $\frac{BD}{CE}$.
ב. נתון: שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא 30 סמ"ר. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.



5. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AC = BC$) שהיקפו 176 ס"מ, חוצי הזוויות CD ו-AF נחתכים בנקודה E. נתון: $AD = 33$ ס"מ. חשב את:
- אורך חוצה הזווית CD.
 - אורכי הקטעים CE ו-CF.
 - שטחי המשולשים: (1) $\triangle ADE$, (2) $\triangle ACE$.



6. במשולש $\triangle ABE$ הישרים AC ו-AD חוצים את הזוויות $\angle BAD$ ו- $\angle BAE$ בהתאמה. נתון: $\angle ADE = \angle AED$.
- הוכח: $\frac{CD}{BC} = \frac{DE}{BD}$.
 - נתון: $BC = 18$ ס"מ, $DE = 20$ ס"מ. חשב את אורך CD.



7. הנקודות D, E ו-F נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כך ש: $DE \parallel BC$. הישרים BD ו-EF חוצים את הזוויות $\angle ABC$ ו- $\angle AED$ בהתאמה.
- הוכח: $\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC}$.
 - נתון: $AB = 18a$, $BC = 9a$. הבע באמצעות a את אורך DE.
 - נתון: $AC = 15a$. הבע באמצעות a את אורך AF.

$$\frac{2}{3} \text{ ג. } \frac{6}{12} \text{ ב. } \frac{1}{12} \text{ א. } \frac{1}{6}$$

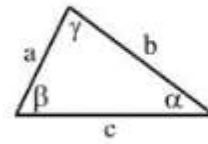
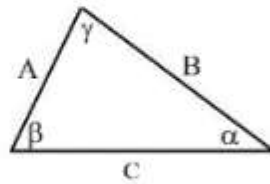
D

פתרונות:

- (1) א. 2.5 ס"מ, ב. 1 סמ"ר, (2) א. 10 ס"מ, ב. 4 ס"מ.
 (3) א. 55 ס"מ, ב. 33 ס"מ - CE, 55 ס"מ - AF, ג. 25 ס"מ, (4) א. $\frac{8}{5}$, ב. 100 סמ"ר.
 (5) א. 44 ס"מ, ב. 25 ס"מ - CF, 27.5 ס"מ - CE, ג. 1, 272.25 סמ"ר, 2. 453.75 סמ"ר.

דמיון משולשים

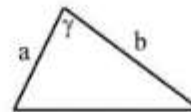
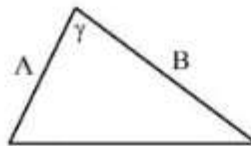
שני משולשים נקראים **משולשים דומים** כאשר שלוש הזוויות שלהם שוות בהתאמה וקיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות.



במשולשים דומים, היחסים בין זוגות הצלעות המתאימות שווים זה לזה כך שמתקיים: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$.

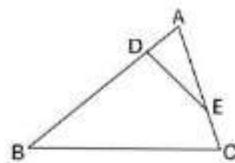
משפט דמיון ראשון: צלע - זווית - צלע (צ.ז.צ)

שני משולשים בהם קיים יחס שווה בין **שני** זוגות צלעות מתאימות והזווית **שביניהן** שווה - הם משולשים דומים.

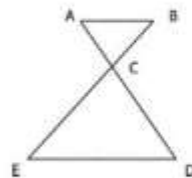


כלומר, אם קיימת זווית משותפת γ ומתקיים שוויון היחסים: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ אז שני המשולשים דומים.

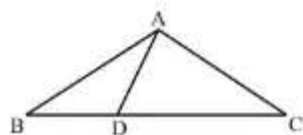
פתור את התרגילים הבאים:



1. הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כמתואר בשרטוט.
נתון: $AD = 2$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ, $CE = 1$ ס"מ, $BD = 8$ ס"מ.
א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
ב. נתון: $DE = 3$ ס"מ. חשב את אורך הקטע BC.



2. בשרטוט נתון: $CD = 6$ ס"מ, $CB = 4$ ס"מ, $AC = 3$ ס"מ, $CE = 8$ ס"מ.
א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.
ב. הוכח: $AB \parallel DE$.
ג. נתון: היקף המשולש $\triangle ABC$ קטן ב-12 ס"מ מהיקף המשולש $\triangle ACDE$. חשב את אורך הקטע AB.



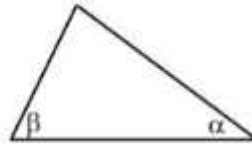
3. הנקודה D נמצאת על הבסיס BC במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ששטחו 768 סמ"ר. נתון: $BC = 64$ ס"מ.
א. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.
ב. נתון: $CD = 39$ ס"מ. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle BCA$.
ג. חשב את היקף המשולש $\triangle ACD$.

פתרונות:

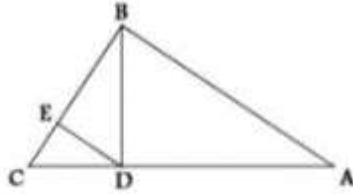
- 1) א. 7.5 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. 144 ס"מ. ד. 104 ס"מ.

משפט דמיון שני: זווית - זווית (ז.ז.)

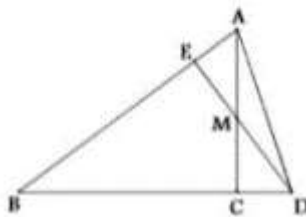
משפט: שני משולשים בהם שווה זווית אחת ושני זוויות הם דומים.



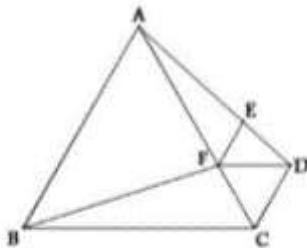
כלומר, בהתאם לשרטוט, אם בשני משולשים יש שתי זוויות שוות, אז המשולשים דומים.



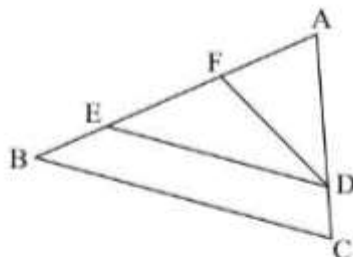
1. הישר BD הוא גובה ליתר במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$.
 הנקודה E על הניצב BC כך ש: $ED \parallel AB$.
 נתון: $BC = 15$ ס"מ, $DC = 9$ ס"מ.
 א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle BDC \sim \triangle DEC$.
 ב. חשב את אורכי הקטעים: AC, AB ו-DE.
 ג. חשב את שטח המשולש ACDE.



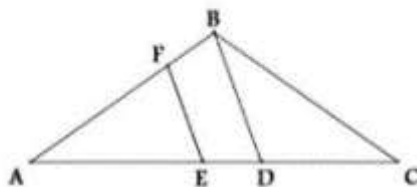
2. במשולש $\triangle ABD$, הגבהים AC ו-DE נחתכים בנקודה M.
 א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle AME \sim \triangle DMC$.
 ב. נתון: $AM = 20$ ס"מ, $AE = 12$ ס"מ.
 חסע BC אורך פי ארבעה מהקטע ME.
 חשב את אורכי הקטעים: BE, DM ו-CD.
 ג. חשב את שטח המשולש $\triangle DMC$.



3. הנקודה F נמצאת על הצלע AC במשולש $\triangle ABC$. המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle CDF$ שווים צלעות. הנקודה E נמצאת על הישר AD.
 נתון: $\angle CAD = \angle CBF$, $EF \parallel DC$.
 א. הוכח: $\triangle AFE \sim \triangle BCF$.
 ב. נתון: $CD = 3$ ס"מ, $AB = 3CD$. חשב את אורך הקטע EF.



4. המשכי שוקי הטרפז BCDE נחתכים בנקודה A. הנקודה F נמצאת על הקטע AE.
 נתון: $\angle ADF = \angle ABC$, $AC = 4$ ס"מ, $AD = 3$ ס"מ, $AB = 6$ ס"מ.
 א. חשב את אורכי הקטעים AF ו-EF.
 ב. נתון: הקטע DE אורך ב-1.5 ס"מ מהקטע DF.
 חשב את אורך הקטע BC.



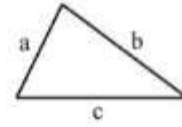
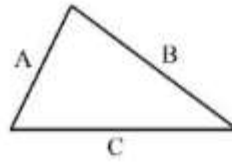
5. הנקודות D, E ו-F נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כך ש-BDEF טרפז. נתון: $\angle CBD = \angle ACB$, $DC = 4$ ס"מ, $AB = BC = 6$ ס"מ.
 א. חשב את אורך הקטע AD.
 ב. נתון: $EF = 3$ ס"מ. חשב את אורכי הקטעים BF ו-AE.

פתרונות:

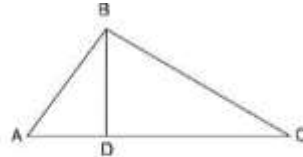
1. א. $DE = 7.2$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ, $AC = 25$ ס"מ. ג. 19.44 סמ"ר.
2. א. $BE = 68$ ס"מ, $DM = 35$ ס"מ, $CD = 21$ ס"מ. ג. 294 סמ"ר.
3. א. $AF = 2$ ס"מ, $EF = 2.5$ ס"מ. ב. 6 ס"מ.
4. א. $AE = 5$ ס"מ. ב. $BF = 1.5$ ס"מ, $AE = 3.75$ ס"מ.

משפט דמיון שלישי: צלע - צלע - צלע (צ.צ.צ.)

משפט: שני משולשים בהם קיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות הם דומים.



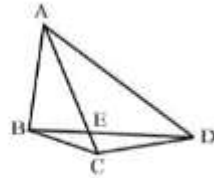
כלומר, בהתאם לשרטוט, אם מתקיים שוויון היחסים: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ בין שני משולשים, אז הם דומים ולכן גם זוויותיהם שוות בהתאמה.



1. במשולש $\triangle ABC$ נתון: $BD \perp AC$, $AB = 15$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ, $AD = 9$ ס"מ.

א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle CBD$.

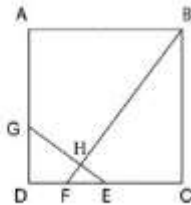
ב. הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הקטעים CD ו-AD, כך שהקטעים BE ו-BF חוצים את הזווית $\angle CBD$.
ג. חשב את אורך הקטע EF.



2. אלכסוני המרובע ABCD נחתכים בנקודה E. נתון: $AC = 2BC$, $AD = 16$ ס"מ. היקף המשולש $\triangle ABC$ הוא 27 ס"מ. הצלע CD ארוכה ב-2 ס"מ מהצלע BC אך קצרה ב-1 ס"מ מהצלע AB.

א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.

ב. נסמן: $BD = 25k$. חשב באמצעות k את אורך הקטע BE.
ג. חשב את היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{ABCE}}{S_{ADCE}}$.



3. נתון הריבוע ABCD ששטחו 1,600 סמ"ר. הנקודה E היא אמצע הצלע CD והנקודה F היא אמצע הקטע DE. הנקודה G נמצאת על AD כך שהישרים BF ו-GE נחתכים בנקודה H. נתון: $AG = 25$ ס"מ.

א. הוכח: $\angle EHF = 90^\circ$.

ב. חשב את אורכי הקטעים HE ו-HF.

ג. חשב את שטח המרובע ABHG.

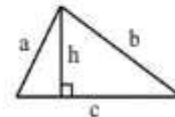
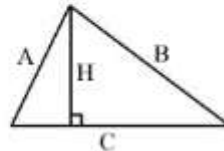
פתרונות:

1. א. 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ. ג. $\frac{9}{16}$. ד. 8 ס"מ. ה. 6 ס"מ. ז. 874 סמ"ר.

יחס הגבהים במשולשים דומים

משפט: גבהים מתאימים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כיחס הצלעות המתאימות.

כלומר, בהתאם לשרטוט, אם המשולשים דומים אז מתקיים שוויון היחסים: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{H}{h}$.



1. המשולש $\triangle GFE$ כולא את המלבן ABCD כמתואר בשרטוט.

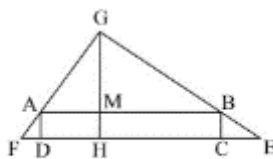
במשולש $\triangle GFE$ הגובה GH חותך את הקטע AB בנקודה M.

נתון: $AB = 8$ ס"מ, $EF = 10$ ס"מ, $GH = 5$ ס"מ.

א. הוכח: $\triangle ABG \sim \triangle FEG$.

ב. חשב את אורך MH.

ג. חשב את שטח המלבן ABCD.



A

פתרונות:

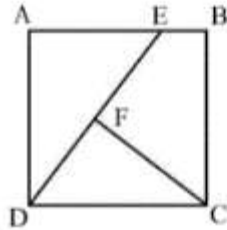
1. א. 1 ס"מ. ב. 8 סמ"ר.

יחס השטחים במשולשים דומים

היחס בין שטחי משולשים דומים הוא יחס הדמיון בריבוע:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{A}{a} \right)^2$$



4. הנקודה E נמצאת על הצלע AB בריבוע ABCD.

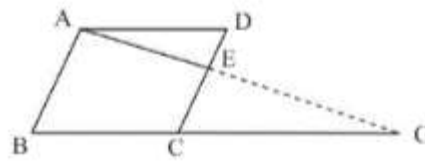
הנקודה F נמצאת על הקטע DE. נתון: $DE \perp CF$.

א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle FCD$.

ב. נתון: $AE = 15$ ס"מ, $DF = 12$ ס"מ. שטח המשולש $\triangle ADE$ גדול

ב-54 סמ"ר משטח המשולש $\triangle FCD$. חשב את שטח המשולש $\triangle ADE$.

ג. חשב את שטח המרובע BCFE.



5. הנקודה E נמצאת על הצלע CD במקבילית ABCD.

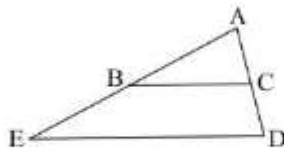
המשכי הישרים AE ו-BC נחתכים בנקודה G. שטח

המשולש $\triangle ADE$ הוא 1 סמ"ר. נתון: $CD = 4DE$.

א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle GCE$.

ב. חשב את שטח המשולש $\triangle CGE$.

ג. חשב את שטח המקבילית ABCD.



7. המשכי שוקי הטרפז BCDE נחתכים בנקודה A.

שטח הטרפז BCDE גדול פי שלושה משטח המשולש $\triangle ABC$.

א. הוכח: BC הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ADE$.

ב. נתון: $AB = 2AC$, $AE = DE$.

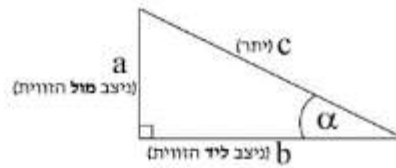
חשב את יחס ההיקפים: $\frac{P_{BCDE}}{P_{\triangle ABC}}$

4) א. 150 סמ"ר, ב. 154 סמ"ר.

5) א. 9 סמ"ר, ב. 8 סמ"ר.

7) א. $\frac{9}{5}$

חלק ג – טריגונומטריה

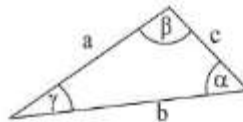


$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c} \quad (\text{סינוס})$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c} \quad (\text{קוסינוס})$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b} \quad (\text{טנגנס})$$

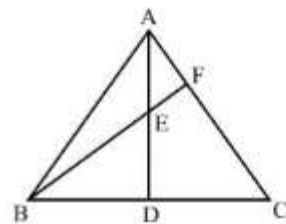
$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{b}{a} \quad (\text{קוטנגנס - כיום אינו כלול בתכנית הלימודים במתמטיקה})$$



בנוסף, שטחו של כל משולש ניתן לחישוב כמחצית מכפלת שתי צלעות

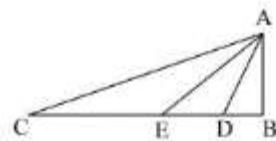
$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \quad \text{צמודות בסינוס הזווית שביניהן לפי הנוסחה:}$$

א. תרגילים ללא פרמטרים



1. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) הגבהים AD ו-BF נחתכים בנקודה E. נתון: $BF = 9$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ. חשב את:

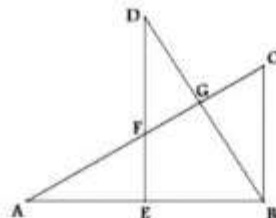
- הזווית $\angle CAD$.
- אורכי השוקיים AB ו-AC.
- אורך הקטע AF.



2. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$) הישרים AD ו-AE מחלקים את הזווית $\angle BAC$ לשלוש זוויות שוות.

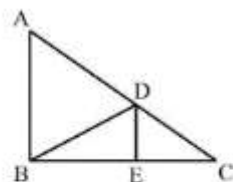
נתון: $AB = 7$ ס"מ, $AC = 25$ ס"מ. חשב את:

- אורך הקטע BD.
- אורך הקטע DE.
- הזווית $\angle AED$.



3. המשולש $\triangle ABC$ ישר זווית. הישר DE הוא אנך אמצעי לניצב AB וחותך את היתר AC בנקודה F. BD מאונק ליתר AC וחותך אותו בנקודה G. נתון: $DE = 8$ ס"מ, $BD = 11$ ס"מ. חשב את:

- הזווית $\angle BAG$.
- אורך הצלע BC.
- שטח המשולש $\triangle BCG$.

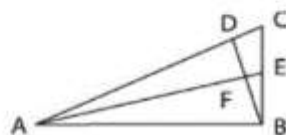


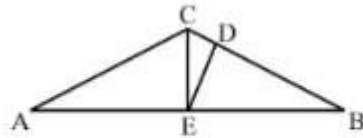
4. הנקודה D נמצאת על היתר AC במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$. הנקודה E נמצאת על הניצב BC. נתון: $AB = AD$, $DE \perp BC$. $CD = 7$ ס"מ, $DE = 4$ ס"מ. חשב את:

- אורך הניצב AB.
- שטח המשולש $\triangle ABD$.

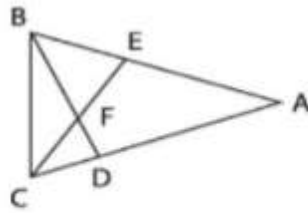
5. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$, הישר BD הוא הגובה ליתר AC. הישר AE הוא חוצה הזווית $\angle BAC$. הישרים BD ו-AE נחתכים בנקודה F. נתון: $AB = 9$ ס"מ, $BC = 3$ ס"מ. חשב את:

- אורך הקטע BD.
- אורך הקטע DF.
- אורך הקטע AF.
- שטח המשולש $\triangle ABF$.

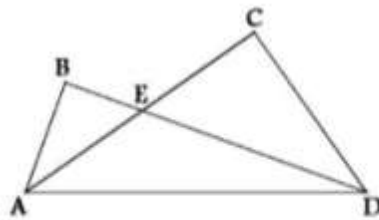




6. במשולש $\triangle ABC$ ששטחו 31 סמ"ר, הזווית $\angle ACB < 90^\circ$. הנקודה E היא אמצע AB. נתון: $BC = AC = 9$ ס"מ. הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך ש-DE מאונך לצלע BC. חשב את:
- הזווית $\angle ACB$.
 - אורך BD.
 - שטח המשולש $\triangle CDE$.



7. במשולש $\triangle ABC$ שווה השוקיים ($AB = AC$), הגובה BD וחוצה הזווית CE נחתכים בנקודה F. נתון: $BD = 10$ ס"מ, $BC = 11$ ס"מ. חשב את:
- הזווית $\angle ACE$.
 - הזווית $\angle BAC$.
 - אורך הקטע AC.



8. למשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle ACD$ יש צלע משותפת AD. הצלעות AC ו-BD נחתכות בנקודה E. נתון: $CE = 4$ ס"מ, $\angle ACD = \angle ABD = 90^\circ$, $\angle ADB = 20^\circ$. חשב את:
- הזווית $\angle BAD$.
 - אורך הקטע AE.
 - שטח המשולש $\triangle ABE$.
 - שטח המשולש $\triangle ADE$.

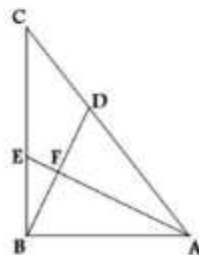
פתרונות:

- א. 41.41° . ב. 9.07 ס"מ. ג. 1.13 ס"מ. ד. 2 ס"מ. ה. 3.2 ס"מ. ו. 4.89 ס"מ. ז. 40.84° .
- א. 43.34° . ב. 14.25 ס"מ. ג. 50.68 סמ"ר. ד. 4 ס"מ. ה. 9.33 ס"מ. ו. 35.74 סמ"ר.
- א. 2.85 ס"מ. ב. 1.39 ס"מ. ג. 8.65 ס"מ. ד. 6.23 סמ"ר.
- א. $\angle ACB = 130.05^\circ$. ב. 7.4 ס"מ. ג. 2.76 סמ"ר. ד. S_{ACDE} .
- א. 32.69° . ב. 49.24° . ג. 13.2 ס"מ. ד. 4.16 ס"מ. ה. 4.05 סמ"ר. ו. 11.86 סמ"ר.

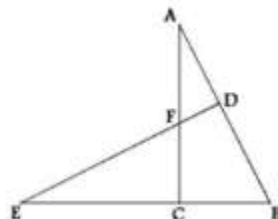
ב. תרגילים הכוללים פרמטרים

בתרגילים שבהם הזווית מוצגת על ידי פרמטר, לעיתים ניעזר בזהויות הבאות: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$



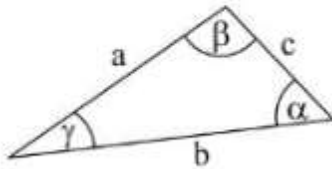
1. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$), AE הוא חוצה הזווית $\angle BAC$. הנקודה D נמצאת על AC כך שמתקיים: $AE \perp BD$. נתון: $AB = b$, $\angle BAC = 2\alpha$. חשב את:
- אורכי הקטעים EF ו-DF.
 - שטח המשולש $\triangle ABC$.



2. הנקודות C ו-D נמצאות בהתאמה על הישרים BE ו-AB. הישרים AC ו-DE נחתכים בנקודה F. נתון: $CF = AF$, $AB \perp DE$, $AC \perp BE$. חשב את:
- הזווית $\angle BAC = \alpha$.
 - הזווית $\angle ADF$.
 - הזווית $\angle ABE$.
 - הזווית $\angle ACF$.
 - הזווית $\angle AEF$.
 - הזווית $\angle ADF$.
 - הזווית $\angle ABE$.
 - הזווית $\angle ACF$.
 - הזווית $\angle AEF$.

$$\frac{b' \cdot \tan 2\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad EF = b \tan \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{b \cdot \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, \quad DF = b \cdot \sin \alpha \quad \text{א. (1 תרגיל: 1)} \quad \frac{1}{8} \quad \text{ב.} \quad \frac{\cos^2 \alpha}{4} \quad \text{א. (2)}$$

משפט הסינוסים

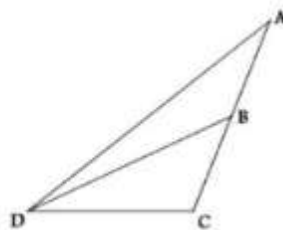


$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{משפט הסינוסים מתקיים בכל משולש:}$$

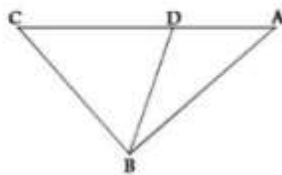
ניתן להשתמש במשפט הסינוסים כאשר:

- ידועים אורכי שתי צלעות והזווית שמול אחת מהן (ז.צ.ז) ונרצה לחשב את הזווית שמול הצלע השנייה.
- ידועות שתי זוויות ואורך של צלע שמול אחת מהן (ז.ז.ז) ונרצה לחשב את אורך הצלע השנייה.

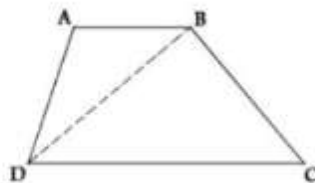
שימו לב! כאשר יש בידינו את ערכו של סינוס הזווית ואנו מעוניינים למצוא בעזרתו את הזווית עצמה, עלינו לזכור כי לאור הזהות: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, למעשה שתי זוויות שונות מתאימות לאותו ערך של סינוס. למשל, עבור $\sin \alpha = 0.5$ נקבל במחשבון ש: $\alpha = 30^\circ$ אך למעשה גם $\alpha = 150^\circ$. בהתאם לנתוני התרגיל, נבחר בזווית החדה או הקהה.



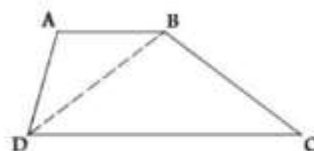
1. במשולש $\triangle ADC$ הקטע BD הוא תיכון לצלע AC .
נתון: $AC = 4$ ס"מ, $\angle BDC = 25^\circ$, $\angle ACD = 112^\circ$. חשב את:
א. אורך הצלע CD .
ב. אורך התיכון BD .
ג. שטח המשולש $\triangle ABD$.



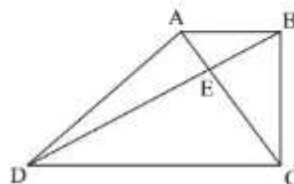
2. הנקודה D נמצאת על הצלע AC במשולש $\triangle ABC$.
שטחו של המשולש $ABCD$ הוא 8 סמ"ר.
נתון: $\angle BAC = 41^\circ$, $BD = 4$ ס"מ, $CD = 5$ ס"מ. חשב את:
א. גודל הזווית $\angle BDC$.
ב. אורך הקטע AB .
ג. שטח המשולש $\triangle ABD$.
ד. שטח המשולש $\triangle ABC$.



3. בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון: $AB = 3$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ.
 $\angle CBD = 90^\circ$, $\angle BDC = 40^\circ$. חשב את:
א. אורך האלכסון BD .
ב. שטח המשולש $\triangle ABD$.
ג. שטח הטרפז $ABCD$.

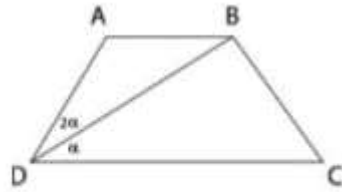


4. בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון: $AB = AD = 6$ ס"מ.
 $BC = BD$. הזווית $\angle BAD$ קהה. שטח המשולש $\triangle ABD$ הוא 9 סמ"ר. חשב את:
א. גודל הזווית $\angle ADC$.
ב. שטח הטרפז $ABCD$.
ג. חיקף הטרפז $ABCD$.

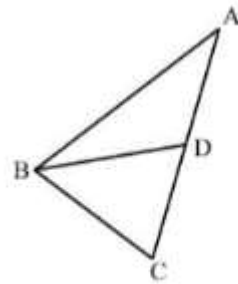


5. אלכסוני הטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נחתכים בנקודה E .
נתון: $BC = 9$ ס"מ, $CD = 13$ ס"מ, $CE = 7.5$ ס"מ, $\angle DBC = 53^\circ$.
חשב את:
א. הזווית הקהה $\angle CED$.
ב. אורך האלכסון BD .

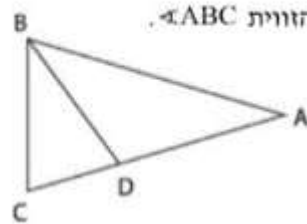
פתרונות: 1) א. 3.23 ס"מ, ב. 4.39 ס"מ, ג. 2.99 סמ"ר, 2) א. 53.13° , ב. 4.88 ס"מ, ג. 2.05 סמ"ר, 3) א. 10.05 סמ"ר, ב. 6.13 ס"מ, ג. 5.91 סמ"ר, ד. 21.66 סמ"ר, 4) א. 30° , ב. 42.59 סמ"ר, 5) א. 106.59° , ב. 16.25 ס"מ, ג. 45.98 ס"מ.



1. בטרפז שווה השוקיים ABCD ($AD=BC$) נסמן: $BC=k$.
 נתון: $\angle ADB=2\alpha$, $\angle BDC=\alpha$, הבע באמצעות α ו- k את:
 א. אורך בסיסי הטרפז.
 ב. שטח המשולש $\triangle ABD$.
 ג. שטח המשולש $\triangle ABCD$.



2. הנקודה D נמצאת על הצלע AC במשולש $\triangle ABC$.
 נסמן: $BC=BD=AD=m$, $\angle ABD=\alpha$. הבע באמצעות α ו- m את:
 א. אורך הקטע AB.
 ב. אורך הקטע CD.
 ג. שטח המשולש $\triangle ABC$.

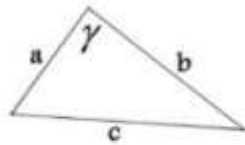


3. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AB=AC$), הקטע BD חוצה את הזווית $\angle ABC$.
 נסמן: $\angle DBC=\beta$, $AC=a$. הבע באמצעות β ו- a את:
 א. BC.
 ב. אורך CD.
 ג. שטח המשולש $\triangle ABD$.

פתרונות:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \frac{k' \sin 3\alpha \cdot \sin 4\alpha}{2 \sin \alpha} \rightarrow \frac{k' \sin 2\alpha \sin 3\alpha}{2 \sin \alpha} \rightarrow \text{ב. } CD = \frac{k \sin 4\alpha}{\sin \alpha}, AB = \frac{k \sin 2\alpha}{\sin \alpha} \\ \text{א. } & \frac{m^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha}{2 \sin \alpha} \rightarrow \frac{m \sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} \rightarrow \text{ב. } \frac{m \sin 2\alpha}{\sin \alpha} \\ \text{א. } & \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin 4\beta}{2 \sin 3\beta} \rightarrow \frac{a \sin \beta \cdot \sin 4\beta}{\sin 2\beta \cdot \sin 3\beta} \rightarrow \text{ב. } \frac{a \sin 4\beta}{\sin 2\beta} \end{aligned}$$

משפט הקוסינוסים



משפט הקוסינוסים מתקיים בכל משולש וניתן להציגו בשני אופנים:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

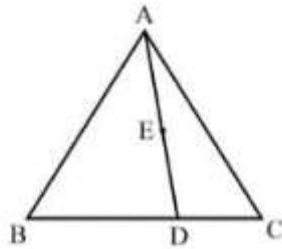
או לאחר בידוד $\cos \gamma$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

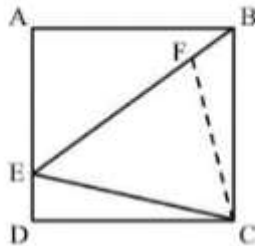
בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו
אורכי שלוש הצלעות (צ.צ.צ.) וברצוננו
למצוא את זווית המשולש

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו
אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ.)
וברצוננו למצוא את הצלע השלישית

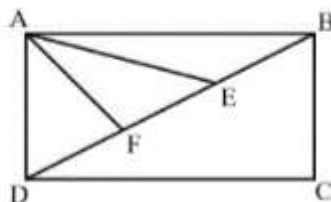
א. תרגילים ללא פרמטרים



- המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה צלעות והיקפו 24 ס"מ. הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים: $BD = 3CD$ והזווית $\angle ADC$ קהה. חשב את:
 - אורך הקטע AD.
 - אורך התיכון BE במשולש $\triangle ABD$.
 - שטח המשולש $\triangle BCE$.



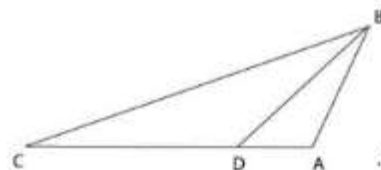
- הנקודה E נמצאת על הצלע AD בריבוע ABCD ששטחו 64 סמ"ר. נתון: $AE = 3DE$.
 - חשב את הזווית $\angle BEC$.
 - הנקודה F נמצאת על BE כך ש: $EF = 4BF$. חשב את אורך CF.
 - חשב את שטח המשולש $\triangle BCF$.



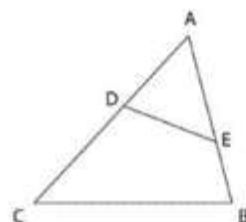
- שטח המלבן ABCD הוא 108 סמ"ר והיקפו 42 ס"מ ($AD < AB$).
 - חשב את אורך האלכסון BD.
 - הנקודות E ו-F מחלקות את האלכסון BD לשלושה חלקים שווים. חשב את הזווית $\angle EAF$.

3) א. 15 ס"מ. ב. 35.77° .

2) א. 50.91° . ב. 6.99 ס"מ. ג. 6.41 סמ"ר.



- הנקודה D נמצאת על הצלע AC במשולש $\triangle ABC$. נתון: $\angle BAC = 115^\circ$. נתון: $AD = a$, $AB = 2a$, $CD = 6a$.
 - הבע באמצעות a את אורך הצלע BC.
 - חשב את הזווית $\angle ACB$.
 - נתון: היקף המשולש $\triangle ABC$ הוא 23 ס"מ. חשב את שטחו.



- הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AC ו-AB במשולש $\triangle ABC$. נתון: $DE = 3$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ. נסמן: $\angle AED = \alpha$.
 - הבע באמצעות α את אורך הקטע AD.
 - נתון: שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא חמישה סמ"ר. מצא את α וחשב את הזווית $\angle BAC$.
 - נתון: $BE = 2$ ס"מ, $CD = 5$ ס"מ. חשב את שטח המרובע BCDE.

פתרונות:

1) א. $8.05a$. ב. 13.01° . ג. 11.56 סמ"ר.

2) א. $\sqrt{25 - 24 \cos \alpha}$. ב. $\alpha = 56.44^\circ$, $\angle BAC = 46.85^\circ$. ג. 13.45 סמ"ר.

חלק ד – חדווא

פונקציית פולינום

משוואת המשיק

תזכורת! משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה (x_1, y_1) היא: $y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$.

1. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A הנתונה הנמצאת על גרף הפונקציה:
א. $A(3,6)$, $f(x) = x^2 - x$ ב. $A(2,12)$, $f(x) = x^3 + x^2$ ג. $A(-2,-4)$, $f(x) = x^2 \cdot (x+1)$

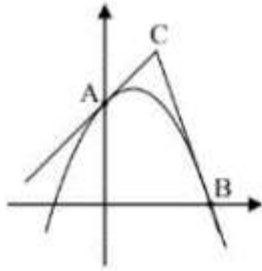
2. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x :
א. $f(x) = x^2 - 3x$ ב. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ ג. $f(x) = x^3 - 9x$ ד. $f(x) = -x(x-1)^2$

3. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר הנתון:
א. $f(x) = x^2 - 6x$ והישר: $y = x - 10$ ב. $f(x) = x^3 + x^2$ ונתון: $y = 2x$

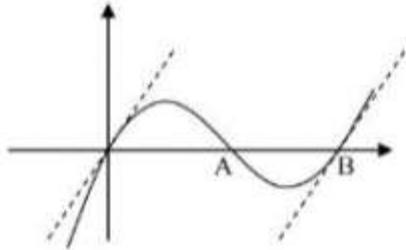
4. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ושיפועו נתון:
א. $f(x) = -x^2 - 4x - 1$ ושיפוע המשיק -6 ב. $f(x) = x^3 + 6x$ ושיפוע המשיק 18

פתרונות: 1) א. $y = 5x - 9$ ב. $y = 16x - 20$ ג. $y = 8x + 12$ ד. $y = 3x - 9$ 2) א. $y = -3x$ ב. $y = 18x + 54$ ג. $y = -9x$ ד. $y = 0$ 3) א. $y = 2x - 2$ ב. $y = -2x + 6$ ג. $y = -6x$ ד. $y = -2x - 4$ 4) א. $y = 4x - 25$ ב. $y = -2x - 4$ ג. $y = 0$ ד. $y = 5x - 3$ 5) א. $y = 18x + 16$ ב. $y = -18x - 16$

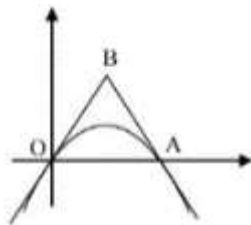
משוואת המשיק - תרגילים הכוללים גרפים



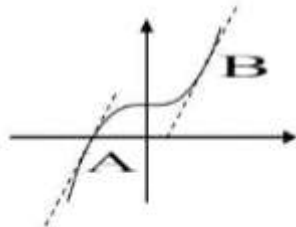
1. הפרבולה $f(x) = -x^2 + x + 2$ חותכת את ציר ה- y ואת ציר ה- x בנקודות A ו-B בהתאמה. מצא את:
 - א. שיעורי הנקודות A ו-B.
 - ב. משוואות הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
 - ג. שיעורי הנקודה C בה נחתכים שני המשיקים.



2. גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודות A ו-B כמתואר בשרטוט.
 - א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 - ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים לגרף הפונקציה בראשית הצירים ובנקודה B.
 - ג. קבע האם משיקים אלו מקבילים זה לזה או נחתכים.



3. גרף הפרבולה $f(x) = -x^2 + 8x$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה A.
 - א. מצא את משוואות הישרים המשיקים לגרף הפונקציה בראשית הצירים ובנקודה A.
 - ב. מצא את שיעורי הנקודה B בה נחתכים המשיקים.
 - ג. חשב את שטח המשולש ΔABO .



4. לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 2$ משיקים שני ישרים בנקודה B ששיעור ה- x שלה הוא 2 ובנקודה A.
 - א. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.
 - ב. נתון ששני המשיקים מקבילים זה לזה. מצא את שיעורי הנקודה A.
 - ג. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

פתרונות:

1. א. $A(0,2)$, $B(2,0)$. ב. הישר $y = x + 2$ משיק בנקודה A, הישר $y = -3x + 6$ משיק בנקודה B. ג. $C(1,3)$.
2. א. $A(1,0)$, $B(3,0)$. ב. המשיק בראשית הצירים: $y = 3x$, המשיק בנקודה B: $y = 6x - 18$. ג. נחתכים.
3. א. המשיק בראשית הצירים: $y = 8x$, המשיק בנקודה A: $y = -8x + 64$. ב. $B(4,32)$. ג. 128 יחיד.
4. א. $y = 12x - 14$. ב. $A(-2,-6)$. ג. $y = 2$.

פונקציית פולינום - חקירה מלאה

א. חקירה מלאה ללא פרמטרים

בתרגילים 9-1 עליו לחקור את הפונקציות הנתונות באופן מלא לפי הסעיפים הבאים:

- תחום ההגדרה.
- נקודות הקיצון וסוגן.
- תחומי העליה והירידה.
- נקודות החיתוך עם הצירים.
- סקיצה של גרף הפונקציה.

1. $f(x) = -x^4 + 32x$	2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$	3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
4. $f(x) = -4x^3 - 4x^2 - x$	5. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$	6. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$
7. $f(x) = x^4 + 12x^2$	8. $f(x) = -x^4 + 20x^3 - 100x^2$	9. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$.

- עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 - נקודות הקיצון ואת סוגן.
 - תחומי העליה והירידה.
 - נקודות החיתוך עם הצירים.
 - שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - עבור על אחת מהטענות הבאות, קבע אם היא נכונה או שגויה:
 - הישר $y = 2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בארבע נקודות.
 - הישר $y = 81$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות.
 - הישר $y = 100$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות.

משימות:



11. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$. ג. שילוח: $x < 0$; ירידת: $0 < x < 2$; עליה: $x > 2$. ד. $(0, 0), (2, 0), (6, 0)$. ה. תחומי משימה: $(0, 2)$ ו- $(2, 6)$.

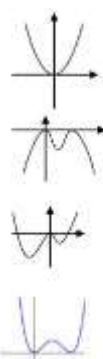
12. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$. ג. שילוח: $x < 0$ או $2 < x < 4$; ירידת: $0 < x < 2$ או $4 < x < 6$. ד. $(0, 0), (2, 0), (4, 0), (6, 0)$. ה. תחומי משימה: $(0, 2)$ ו- $(4, 6)$.

13. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$. ג. שילוח: $x < -3$ או $3 < x < 5$; ירידת: $-3 < x < 3$ או $5 < x < 6$. ד. $(-3, 0), (0, 0), (5, 0), (6, 0)$. ה. תחומי משימה: $(-3, 0)$ ו- $(5, 6)$.

14. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. ג. שילוח: $x < -1$ או $1 < x < 2$; ירידת: $-1 < x < 1$ או $2 < x < 3$. ד. $(-1, 0), (0, 0), (2, 0), (3, 0)$. ה. תחומי משימה: $(-1, 0)$ ו- $(2, 3)$.

15. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 + 12x^2$. ג. שילוח: $x < 0$ או $2 < x < 6$; ירידת: $0 < x < 2$ או $6 < x < 10$. ד. $(0, 0), (2, 0), (6, 0), (10, 0)$. ה. תחומי משימה: $(0, 2)$ ו- $(6, 10)$.

16. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$. ג. שילוח: $x < 0$ או $2 < x < 6$; ירידת: $0 < x < 2$ או $6 < x < 10$. ד. $(0, 0), (2, 0), (6, 0), (10, 0)$. ה. תחומי משימה: $(0, 2)$ ו- $(6, 10)$.



17. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$. ג. שילוח: $x < 0$; ירידת: $0 < x < 2$; עליה: $x > 2$. ד. $(0, 0), (2, 0), (6, 0)$. ה. תחומי משימה: $(0, 2)$ ו- $(2, 6)$.

18. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$. ג. שילוח: $x < 0$ או $2 < x < 4$; ירידת: $0 < x < 2$ או $4 < x < 6$. ד. $(0, 0), (2, 0), (4, 0), (6, 0)$. ה. תחומי משימה: $(0, 2)$ ו- $(4, 6)$.

19. א. כל א. ב. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$. ג. שילוח: $x < -3$ או $3 < x < 5$; ירידת: $-3 < x < 3$ או $5 < x < 6$. ד. $(-3, 0), (0, 0), (5, 0), (6, 0)$. ה. תחומי משימה: $(-3, 0)$ ו- $(5, 6)$.

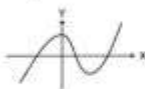
20. א. 1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. ג. שילוח: $x < -1$ או $1 < x < 2$; ירידת: $-1 < x < 1$ או $2 < x < 3$. ד. $(-1, 0), (0, 0), (2, 0), (3, 0)$. ה. תחומי משימה: $(-1, 0)$ ו- $(2, 3)$.

ב. חקירה מלאה כולל פרמטרים

1. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 3$ הוא 12.
 - א. מצא את ערכו של הפרמטר a .
 - ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 2. תחומי העליה והירידה.
 3. נקודת החיתוך עם הצירים.
 - ג. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. מצא כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x) = 4.5$. נמק.
2. גרף הפונקציה $f(x) = 2x^5 + mx^4 + 3$ עובר בנקודה $(1, 0)$.
 - א. מצא את ערכו של הפרמטר m .
 - ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 2. תחומי העליה והירידה.
 - ג. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. מצא עבור אילו ערכי k יהיו למשוואה: $f(x) = k$ שלושה פתרונות. נמק.
3. לפונקציה $f(x) = x^4 + ax^3 - ax^2$ יש נקודת קיצון בנקודה בה $x = 1$.
 - א. מצא את ערכו של הפרמטר a .
 - ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 2. תחומי העליה והירידה.
 3. נקודות החיתוך עם הצירים.
 - ג. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. מצא עבור אילו ערכי k חותך הישר $y = k$ את גרף $f(x)$ בשתי נקודות בלבד.

פתרונות:

1. א. $a = 12$. ב. 1. $\max(1, 5), \min(2, 4)$.
2. עילח: $x < 2$ או $x < 1$; יורדת: $1 < x < 2$. 3. $(0, 0)$.
- ג. השרטוט משמאל. ד. שלושה.



2. א. $m = -5$. ב. 1. $\max(0, 3), \min(2, -13)$.
2. עילח: $x < 2$ או $x < 0$; יורדת: $0 < x < 2$.
- ג. השרטוט משמאל. ד. $-13 < k < 3$.

3. א. $a = -4$. ב. 1. $\min(0, 0), \max(1, 1), \min(2, 0)$.
2. עילח: $0 < x < 1$ או $2 < x$; יורדת: $1 < x < 2$ או $x < 0$.
3. $(2, 0), (0, 0)$.
- ג. השרטוט משמאל. ד. $k = 0$ או $k < -1$.

נקודות קיצון בקצה תחום סגור ונקודות קיצון מוחלטות

1. עבור הפונקציות הבאות, מצא את שיעוריהן של כל נקודות הקיצון ואת סוגן בתחום הנתון. בתשובתך ציין אילו מהנקודות הן נקודות קיצון **פנימיות** ואילו נמצאות בקצה **התחום** הנתון:

- א. $f(x) = x^3 - 3x$ בתחום: $-2 \leq x \leq 2$. ב. $f(x) = -x^4 + 32x$ בתחום: $0 \leq x \leq 4$.
ג. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ בתחום: $0 \leq x \leq 3$. ד. $f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x$ בתחום: $-4 \leq x \leq 1$.

2. מצא את שיעורי נקודות המקסימום והמינימום **המוחלטות** של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

- א. $f(x) = x^3 - 3x$ בתחום $0 \leq x \leq 4$. ב. $f(x) = (x^2 - 1)^2$ בתחום: $-2 \leq x \leq 2$.
ג. $f(x) = -0.5x^2 + 16x$ בתחום: $-1 \leq x \leq 1$. ד. $f(x) = x^3 - 9x^2$ בתחום: $-1 \leq x \leq 10$.

פתרונות:

1. א. פנימיות: $\max(-1, 2)$, $\min(1, -2)$; בקצה התחום: $\max(2, 2)$, $\min(-2, -2)$.
ב. פנימיות: $\max(2, 48)$, בקצה התחום: $\min(0, 0)$, $\min(4, -128)$. ג. פנימיות: $\min(2, -25)$,
בקצה התחום: $\max(0, -9)$, $\max(3, 0)$. ד. פנימיות: $\max(-3, 81)$, $\min(0.5, -4.75)$.
2. א. מינימום מוחלט $(1, -2)$, מקסימום מוחלט $(4, 52)$.
ב. מינימום מוחלט $(-1, 0)$, $(1, 0)$, מקסימום מוחלט $(-2, 9)$, $(2, 9)$. ג. מינימום מוחלט $(-1, -16.5)$,
מקסימום מוחלט $(1, 15.5)$. ד. מינימום מוחלט $(6, -108)$, מקסימום מוחלט $(10, 100)$.

נושא 10: בעיות ערך קיצון

בעיות מספרים

פונקציות פולינום

1. ההפרש בין שני מספרים הוא 4.
א. מצא את המספרים, בהינתן שמכפלתם מינימלית.
ב. מצא את המכפלה המינימלית.
2. סכומם של שני מספרים הוא 20. מצא את המספרים בהינתן שסכום ריבועיהם הוא מינימלי.
3. סכומם של שני מספרים הוא 30. מכפילים את ריבועו של המספר הראשון במספר השני.
מצא את המספרים שעבורם מכפלה זו:
א. מקסימלית. ב. מינימלית.
4. סכומם של שני מספרים הוא 10. מצא את המספרים שעבורם מכפלת המספר הראשון בריבועו של המספר השני היא מינימלית.
5. סכומם של שלושה מספרים חיוביים הוא 30. המספר הראשון והשני שווים.
א. מצא את המספרים, אם נתון שמכפלתם מקסימלית.
ב. מצא את המכפלה המקסימלית.
6. סכומם של שלושה מספרים הוא 54. המספר השני גדול פי שלושה מהראשון.
מצא את המספרים, אם נתון שמכפלתם מקסימלית.
7. סכומם של שלושה מספרים הוא 90. המספר השני גדול פי שניים מהראשון.
מצא את המספרים בהינתן שמכפלתם מקסימלית.
8. סכומם של שלושה מספרים חיוביים הוא 48. המספר הראשון והשני שווים.
א. מצא את המספר הראשון, שעבורו מכפלת המספר הראשון בריבועו של המספר השני ובמספר השלישי - תהיה מקסימלית.
ב. חשב את המכפלה המקסימלית.
9. סכומם של שני מספרים הוא $2a$ ($0 < a$).
הבע באמצעות a את המספרים בהינתן שמכפלתם מקסימלית.
10. סכומם של שלושה מספרים הוא $18a$ ($0 < a$). המספר השני גדול פי שניים מהראשון. מכפלתם של שלושת המספרים היא מקסימלית.
א. הבע באמצעות a את שלושת המספרים.
ב. נתון: מכפלתם המקסימלית של שלושת המספרים היא 192. חשב את סכום שלושת המספרים.

פתרונות:

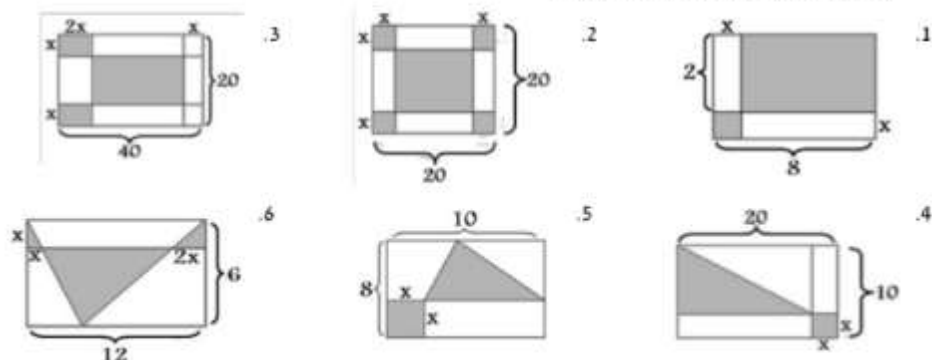
- 1) א. 2, -4. ב. 10, 10. 2) א. 20, 10. ב. 30, 0. 3) א. 5, 10, 10. ב. 1000.
4) א. 18. ב. המכפלה: 69,984. 5) א. 9, a. ב. 6a, 8a, 4a. 6) א. 18, 27, 9. ב. 30, 40, 20.

בעיות גיאומטריות

פונקציות פולינום

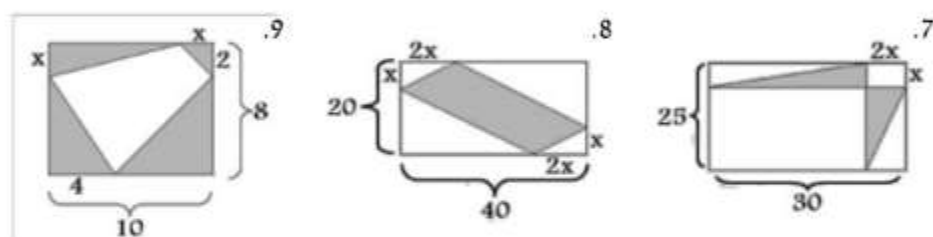
בתרגילים הבאים נתונים אורכי קטעים במלבנים בסנטימטרים.

- הבע באמצעות x את השטח השחור.
- מצא עבור איזה ערך של x יתקבל השטח השחור המינימלי.
- חשב את גודלו של השטח המינימלי.



בתרגילים הבאים נתונים אורכי קטעים במלבנים בסנטימטרים.

- הבע באמצעות x את השטח השחור.
- מצא עבור איזה ערך של x יתקבל השטח השחור המקסימלי.
- חשב את גודלו של השטח המקסימלי.



10. בתוך מלבן ABCD שהיקפו 32 מ', מציירים מלבן פנימי קטן יותר. צלעות המלבן

מקבילות זו לזו כמתואר בשרטוט והמרחקים ביניהן מופיעים בשרטוט.

נסמן באמצעות x את הרוחב AB.

א. מצא את x שעבורו שטח המלבן הפנימי יהיה מקסימלי.

ב. כאשר שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי, חשב את היקפו.

11. בשרטוט מופיע משולש שווה שוקיים שהיקפו 20 ס"מ ובסיסו הוא צלע במלבן. נסמן בעזרת x את

אורך השוק במשולש. במלבן, הצלע הסמוכה לבסיס המשולש, ארוכה משוק המשולש ב-2 ס"מ.

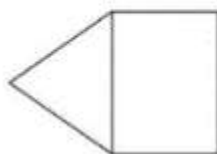
א. הבע באמצעות x את:

1. אורך בסיס המשולש.

2. שטח המלבן.

ב. מצא את x שעבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.

ג. כאשר שטח המלבן מקסימלי, חשב את היקפה של הצורה כולה.



פתרונות:

- א. $x^2 - 2x + 16$, ג. $x = 1$ ס"מ, 15 ס"מ, 2. א. $8x^2 - 80x + 400$, ב. $x = 5$ ס"מ, 200 ס"מ.
- א. $10x^2 - 140x + 800$, ג. $x = 7$ ס"מ, 310 ס"מ, 4. א. $15x^2 - 15x + 100$, ב. $x = 5$ ס"מ, 5.
- א. 62.5 ס"מ, 5. א. $9x^2 - 40x + 40$, ג. $x = 3$ ס"מ, 26.5 ס"מ, 6. א. $3x^2 - 15x + 36$, ב. $x = 10$ ס"מ, 200 ס"מ.
- א. $40x - 2x^2$, ג. $x = 10$ ס"מ, 200 ס"מ, 8. א. $4x^2 - 80x + 400$, ב. $x = 10$ ס"מ, 400 ס"מ.
- א. $4x^2 - 80x + 400$, ג. $x = 10$ ס"מ, 400 ס"מ, 9. א. $4x^2 - 80x + 400$, ב. $x = 10$ ס"מ, 400 ס"מ.
- א. 14 מטר, 11. א. $20 - 2x$, 2. $(x+2)(20-2x)$, ב. $x = 4$, ג. 32 ס"מ.

בעיות גרפים

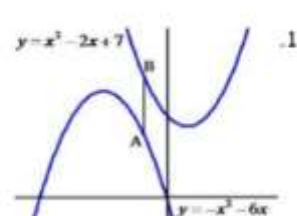
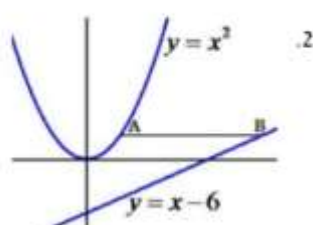
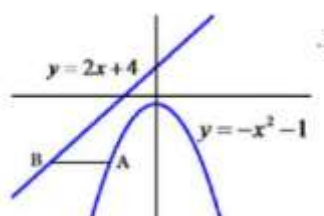
פונקציות פולינום

בתרגילים 1-3, נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A באמצעות t . הקטע AB מקביל לאחד הצירים, כמותאר בשרטוט המתאים. שיעורי הנקודה A מתאימים לרביע בו היא מופיעה בשרטוט. בכל תרגיל:

א. הבע באמצעות t את אורכו של הקטע AB.

ב. מצא את t עבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. חשב את האורך המינימלי של הקטע AB.



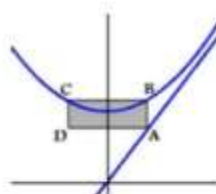
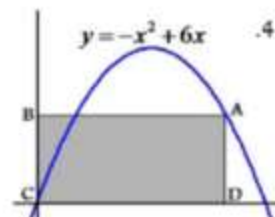
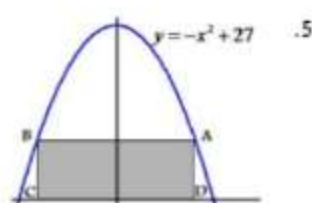
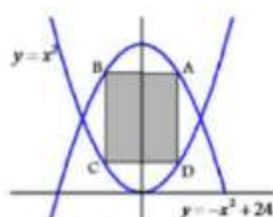
בתרגילים 4-6, נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A באמצעות t . צלעות המלבן ABCD מקבילות לצירים.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון. בכל תרגיל:

א. הבע באמצעות t את שטח המלבן ABCD.

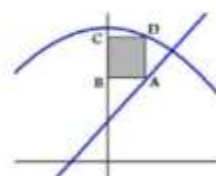
ב. מצא את t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.

ג. חשב את השטח המקסימלי של המלבן.



הנקודה A נמצאת על הישר $y = 27x$ ברביע הראשון. הנקודות B ו-C נמצאות על הפרבולה $f(x) = x^2 + 216$ כך שמתקבל המלבן ABCD שצלעותיו מקבילות לצירים כמותאר בשרטוט. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A באמצעות t . מצא את ערכו של t שעבורו שטח המלבן ABCD מקסימלי.

ב. מינימלי.



הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על הישר $y = 6x + 6$ והנקודה D נמצאת על הפרבולה $f(x) = -x^2 + 21$ כמותאר בשרטוט. הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה- y כך שמתקבל המלבן ABCD.

א. חשב את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.

ב. כאשר שטח המלבן ABCD מקסימלי, חשב את היקפו.

פתרונות:

1. א. $AB = 2t^2 + 4t + 7$. ב. 1-. ג. 5 יח' אורך. ד. $AB = t^2 - t + 6$. ה. 0.5. ו. 5.75 יח' אורך.

2. א. $AB = \frac{t^2 + 2t + 5}{2}$. ב. 1-. ג. 2 יח' אורך. ד. $S = -t^3 + 6t^2$. ה. 4. ו. 32 יח'.

3. א. $S = -2t^3 + 54t$. ב. 3. ג. 108 יח'.

4. א. 6. ב. 12. ג. 8 יח'.

5. א. $S = -4t^3 + 48t$. ב. 2. ג. 64 יח'.

6. א. 8 יח'.